

Prova scritta parziale n. 3

Analisi Matematica 2

Corso di Studi in Matematica

21 maggio 2026

1. Fissato $\alpha \in \mathbb{R}$ si consideri la curva $\gamma: [-3, 3] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da

$$\gamma(t) = (t(9 - t^2), (t^2 - 1)(t^2 - 4) - \alpha), \quad t \in [-3, 3].$$

- (a) Nel caso $\alpha = 0$ trovare le intersezioni di γ con gli assi coordinati;
(b) Calcolare

$$\int_{\gamma} \frac{-y \, dx + x \, dy}{x^2 + y^2}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{4, 40\}$.

2. Dato $u_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ studiare le soluzioni del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = \frac{1}{u + x^2}, \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

In particolare:

- (a) dimostrare che per ogni $u_0 \neq 0$ la soluzione massimale è definita su un intervallo superiormente illimitato;
(b) dimostrare che esiste $\bar{u}_0 > 0$ tale che se $u_0 \geq \bar{u}_0$ allora l'intervallo massimale di esistenza della soluzione è tutto $\mathbb{R}$;
(c) dimostrare che se $u_0 < 0$ allora $u(x) + x^2 \rightarrow 0$ per $x \rightarrow +\infty$;
(d) dimostrare che esiste un unico $u_0 \in \mathbb{R}$ per cui la soluzione massimale è definita su tutto $\mathbb{R}$ e $u(x) + x^2 \rightarrow 0$ per $x \rightarrow -\infty$ (suggerimento: l'unicità è forse più semplice dell'esistenza).