

Prova scritta n. 1

Analisi Matematica 2

Corso di Studi in Matematica

5 giugno 2026

1. Al variare di $c \in \mathbb{R}$ disegnare gli insiemi di livello $L_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = c\}$ della funzione

$$f(x, y) = 2x^3 - 3x^2 - y^4 - y^2.$$

In particolare:

- (a) determinare i punti critici di f e dire se sono massimi o minimi locali;
- (b) determinare i valori di $c \in \mathbb{R}$ per cui L_c è compatto;
- (c) determinare i valori di $c \in \mathbb{R}$ per cui L_c è connesso.

Soluzioni. Per trovare i punti critici calcoliamo le derivate parziali di f :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x^2 - 6x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -4y^3 - 2y.$$

E' facile verificare che i punti in cui si annullano entrambe le derivate parziali sono $(0, 0)$ e $(1, 0)$. Per determinare se sono massimi o minimi locali, calcoliamo la matrice hessiana di f :

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 12x - 6 & 0 \\ 0 & -12y^2 - 2 \end{pmatrix}.$$

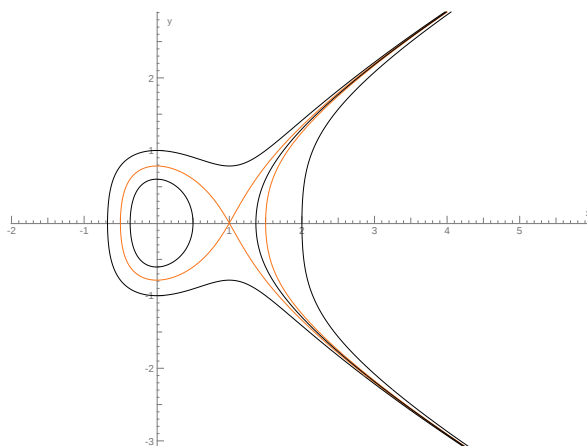
Valutando la matrice hessiana nei punti critici, otteniamo:

$$H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad H_f(1, 0) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Dal segno dei determinanti delle matrici hessiane, deduciamo che $(0, 0)$ è un punto di massimo relativo e $(1, 0)$ è un punto di sella.

Visto che la funzione è di classe C^1 al di fuori dei punti critici si può applicare il teorema del Dini che ci dice che gli insiemi di livello sono localmente grafici di funzioni di classe C^1 . I valori critici sono $f(0, 0) = 0$ e $f(1, 0) = -1$. Intuitivamente si capisce che la topologia degli insiemi di livello L_c cambia in corrispondenza di questi valori critici.

In base al segno delle derivate parziali (e al teorema di Dini) sappiamo la direzione in cui si muovono le curve di livello. Osservando che il valore di f sull'asse delle x varia con continuità da $-\infty$ a $+\infty$ sappiamo che tutte le curve di livello incontrano l'asse delle x . Inoltre tutti gli insiemi di livello sono simmetrici rispetto all'asse delle x perché $f(x, y) = f(x, -y)$. Il livello L_0 ha un punto isolato nel massimo locale $(0, 0)$ ed è poi composto dal grafico di una funzione $x = h_0(y)$ definita per ogni $y \in \mathbb{R}$ (in quanto $x \mapsto f(x, y)$ assume tutti i valori reali per ogni y fissato) passa dal punto $(3/2, 0)$ e tende a $+\infty$ per $y \rightarrow \pm\infty$. I livelli L_c con $c > 0$ incontrano l'asse delle x in un solo punto $x > 3/2$ e sono dei grafici $x = h_c(y)$ simili ad h_0 . I livelli L_c con $-1 < c < 0$ hanno due componenti connesse, una è una curva chiusa che circonda il punto $(0, 0)$ contenuta nel semipiano $x < 1$, e l'altra è un grafico $x = h_c(y)$ simile ad h_0 che passa da un punto $x \in (1, 3/2)$. Il livello critico L_{-1}



è formato da una curva a "flocco" con una autointersezione nel punto $(1, 0)$. I livelli L_c con $c < -1$ sono formati da una singola curva del tipo $y = \pm g(x)$ dove g è definita su un intervallo $[a_c, +\infty)$ dove $g(a_c) = 0$ e $g(x) > 0$ per $x > a_c$, g crescente su $[a_c, 0]$, decrescente in $[0, 1]$ e poi crescente (fino a $+\infty$) in $[1, +\infty)$.

□

2. Studiare le soluzioni (massimali) $u = u(x)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = u^3 - x \\ u(0) = u_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

- (a) Dimostrare che le soluzioni sono definite per ogni $x < 0$. (2 punti)
- (b) Dimostrare che se $u_0 < 0$ le soluzioni hanno un asintoto verticale. (2 punti)
- (c) Dimostrare che se $u_0 > 0$ è abbastanza grande le soluzioni hanno un asintoto verticale. (3 punti)
- (d) Dimostrare che esiste un unico u_0 per cui la corrispondente soluzione è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$. (3 punti)

Soluzioni. (a) La funzione $f(x, u) = u^3 - x$ è definita e di classe C^∞ in $\mathbb{R}^2$. Siamo quindi nelle ipotesi del teorema di esistenza e unicità locale. Per il teorema della fuga dai compatti, l'unica possibilità affinché una soluzione non sia definita per ogni $x < 0$ è che abbia un asintoto verticale. Questo comportamento è impossibile nei tempi negativi, perché in contraddizione con la monotonia della soluzione: u crescente in $\{y > x^{1/3}\}$ e decrescente in $\{y < x^{1/3}\}$.

(b) Sia $u_0 < 0$. Consideriamo la funzione v soluzione di

$$\begin{cases} v'(x) = v^3(x) \\ v(0) = u_0. \end{cases}$$

Poiché $v'(x) = v^3(x) \geq v^3(x) - x = f(x, v(x))$, per il criterio di confronto, otteniamo che $v > u$ nel dominio comune di definizione di u e v , per $x > 0$. Poiché $u_0 < 0$ otteniamo che

$$v(x) = -\sqrt{\frac{1}{1/u_0^2 - 2x}}, \quad v : [0, 1/(2u_0^2)) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \lim_{x \rightarrow 1/(2u_0^2)^-} v(x) = -\infty.$$

Poiché tale funzione ha un asintoto verticale, deduciamo che anche u ha un asintoto verticale e $\beta \leq 1/(2u_0^2)$.

(c) Sia $u_0 > 0$. Consideriamo la funzione w soluzione di

$$\begin{cases} w'(x) = \frac{w^3(x)}{2} \\ w(0) = u_0. \end{cases}$$

Poiché $u_0 > 0$, otteniamo

$$w(x) = \sqrt{\frac{1}{1/u_0^2 - x}}, \quad w : [0, 1/u_0^2) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \lim_{x \rightarrow 1/u_0^2 -} w(x) = +\infty.$$

Osserviamo che $w'(x) = w^3(x)/2 \leq w^3(x) - x = f(x, w(x))$ se $w^3(x) \geq 2x$ e questo è vero per ogni $x \in [0, 1/u_0^2)$ a patto che u_0 sia abbastanza grande. Deduciamo quindi che w è sottosoluzione per u se u_0 è abbastanza grande. In particolare, per tali u_0 la soluzione u ha un asintoto verticale e $\beta \leq 1/u_0^2$.

(d) Grazie a (b) e (c) otteniamo che

$$I := \{u_0 \in \mathbb{R} : u \text{ ha asintoto verticale e limite } -\infty\}$$

e

$$J := \{u_0 \in \mathbb{R} : u \text{ ha asintoto verticale e limite } +\infty\}$$

sono due insiemi non vuoti (anzi, I contiene la semiretta $(-\infty, 0)$). I due insiemi sono chiaramente disgiunti. Inoltre, per unicità della soluzione, I e J hanno la seguente proprietà:

$$\begin{aligned} u_0 \in I &\Rightarrow (-\infty, u_0) \subset I, \\ u_0 \in J &\Rightarrow (u_0, +\infty) \subset J. \end{aligned}$$

Affermiamo che I è aperto. Valgono i seguenti fatti:

- replicando il ragionamento fatto in (b), otteniamo che se esiste x_1 tale che $(x_1, u(x_1))$ appartiene al quarto quadrante, allora u ha un asintoto verticale ed ha limite $-\infty$;
- se $u_0 \in I$ allora definitivamente il grafico di u appartiene al quarto quadrante;
- sia A un aperto di $\mathbb{R}^2$, allora per dipendenza continua dai dati iniziali, se esiste x_2 tale che $(x_2, u(x_2)) \in A$, allora esiste un intorno $(u_0 - \delta, u_0 + \delta)$ di u_0 tale che tutte le soluzioni con dato iniziale in tale intorno al tempo x_2 hanno grafico appartenente ad A .

Considerando A come il quarto quadrante aperto, abbiamo la dimostrazione del claim. Per dimostrare che J è aperto si usa la stessa strategia, utilizzando sottosoluzioni come in (c), il teorema di esistenza continua dai dati iniziali, e il fatto che ogni soluzione con dato iniziale in J ha grafico che appartiene definitivamente all'aperto $\{y > 2x\}$.

Dalla discussione precedente, otteniamo che il complementare di $I \cup J$ in $\mathbb{R}$ è un intervallo non vuoto, chiuso e limitato $[a, b]$. Inoltre

$$[a, b] = \{u_0 : u \text{ esiste per tutti gli } x > 0\}.$$

Supponiamo per assurdo che esistano φ, ψ due soluzioni distinte con dati iniziali $0 \leq a \leq \psi(0) < \varphi(0) \leq b$. Allora la differenza $\Phi = \varphi - \psi$ risolve

$$\Phi' = \varphi^3 - \psi^3 = \Phi(\varphi^2 + \psi^2 + \varphi\psi) \geq c\Phi$$

con $c = \varphi(0)^2 + \psi(0)^2 + \varphi(0)\psi(0) > 0$ per le ipotesi su a e b . Allora Ψ ha una crescita più che esponenziale. Questo implica che il grafico di φ cade definitivamente nel semipiano $y > 2x$, quindi ha un asintoto verticale. Questo è assurdo. $\square$

