

Prova scritta n. 1

Analisi Matematica 2

Corso di Studi in Matematica

5 giugno 2026

1. Al variare di $c \in \mathbb{R}$ disegnare gli insiemi di livello $L_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = c\}$ della funzione

$$f(x, y) = 2x^3 - 3x^2 - y^4 - y^2.$$

In particolare:

- (a) determinare i punti critici di f e dire se sono massimi o minimi locali;
 - (b) determinare i valori di $c \in \mathbb{R}$ per L_c è compatto;
 - (c) determinare i valori di $c \in \mathbb{R}$ per cui L_c è connesso.
2. Studiare le soluzioni (massimali) $u = u(x)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = u^3 - x \\ u(0) = u_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

- (a) Dimostrare che le soluzioni sono definite per ogni $x < 0$.
- (b) Dimostrare che se $u_0 < 0$ le soluzioni hanno un asintoto verticale.
- (c) Dimostrare che se $u_0 > 0$ è abbastanza grande le soluzioni hanno un asintoto verticale.
- (d) Dimostrare che esiste un unico u_0 per cui la corrispondente soluzione è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$.