ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 7 - 1.10.2025

RICEVIMENTO MER ore 15

Insiemi numerici: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$

$+, \cdot, n^m, n!, \sum_{k=0}^{n} k$

gruppo: $*$ operazione su G $(G,*)$ è un gruppo se
- associatività: $(x*y)*z = x*(y*z)$
- elemento neutro: $\exists e : \quad x*e = x \quad e*x = x$
- inverso: $\forall x \, \exists y : \quad x*y = e = y*x$

(se $x*y = y*x$ diremo che il gruppo è commutativo o abeliano)

<u>Nota</u> se $* = +$ $\quad e = 0$ $\quad$ inverso si chiama opposto

$y = -x \qquad x + (-x) = 0$

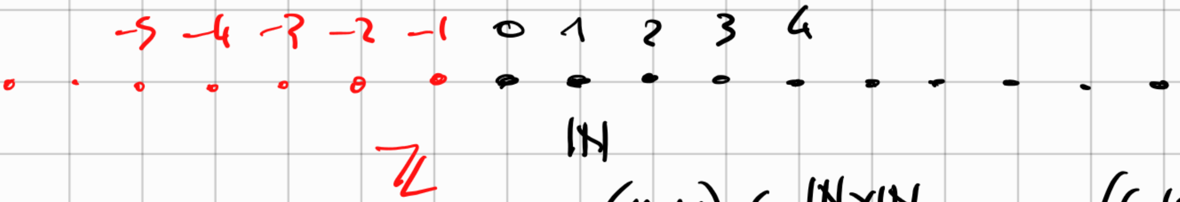
$x - z = x + (-z)$

se $* = \cdot$ $\quad e = 1$ $\quad$ inverso si chiama reciproco

$y = x^{-1} = \frac{1}{x} \qquad x \cdot x^{-1} = 1$

$\frac{x}{z} = x \cdot z^{-1}$

$\mathbb{Z}$ estende $\mathbb{N}$ in modo da avere l'opposto per la somma cosicché $(\mathbb{Z}, +)$ è un gruppo



$(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ $\qquad (6,4)$ "-2"

"$m-n$" $\qquad (8,6)$ "-2"

<u>Relazione di equivalenza</u> $(n,m) \sim (n',m') \iff m + n' = m' + n$

$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \times \mathbb{N} / \sim$ $\qquad$ $m - n = m' - n'$

[Se $\sim$ è una relazione di equivalenza su A]

per ogni $a \in A$ definisco la classe di equivalenza

$$[a]_\sim = \{x \in A : x \sim a\} \qquad b \sim a \Leftrightarrow b \in [a]_\sim$$

[definisco il quoziente $A/_\sim = \{[a]_\sim \mid a \in A\}$]

$\mathbb{Z}$ estende $\mathbb{N}$ nel senso che $\mathbb{N} \xrightarrow{f} \mathbb{Z}$

$n \longmapsto [(0,n)]_\sim$

f è iniettiva

posso usare $\mathbb{N}' = f(\mathbb{N})$ al posto di $\mathbb{N}$

così $\mathbb{N}' \subseteq \mathbb{Z}$.

Si può estendere $+$ e $\cdot$ su $\mathbb{Z}$
in modo che valga la proprietà associativa

$(\mathbb{Z}, +)$ diventa un gruppo commutativo

$(\mathbb{Z}, \cdot)$ non è un gruppo.

$(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ è un anello.

Es $[(n,m)]_\sim + [(n',m')]_\sim$
$= [(n+n', m+m')]_\sim$

$(m-n) + (m'-n') \overset{!}{=} (m+m') - (n+n')$

$(A, +, \cdot)$ si dice essere un anello se
$(A, +)$ è un gruppo commutativo, $\cdot$ è associativo,
e vale la proprietà distributiva:

$$(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

(se $a \cdot b = b \cdot a$ diremo che l'anello è commutativo)

(se esiste $1 \in A$ t.c. $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ si dice che [A è un anello con unità]

(Es: i polinomi sono un anello) con unità

$(A, +, \cdot)$ è un campo se è un anello commutativo con unità $1 \neq 0$ tale che $\forall\, a \in A,\ a \neq 0$
$\exists\, b \in A : a \cdot b = 1$.

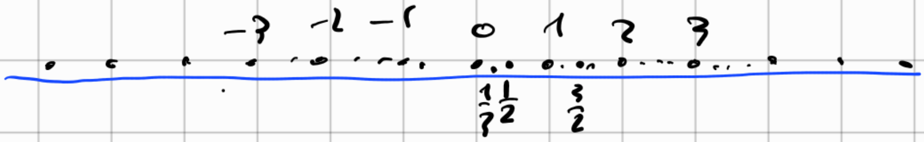
Per avere un campo estendiamo $\mathbb{Z}$:

$$(a,b) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) \qquad (a,b) \quad = \frac{a}{b}$$

numeratore — denominatore

$$\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\} /_{\sim} \qquad (a,b) \sim (a',b') \Leftrightarrow ab' = a'b$$

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$$



$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$$

$\mathbb{Q}$ è un campo.

ORDINAMENTO

Su $\mathbb{N}$: $\quad n \leq m \iff \exists\, k \in \mathbb{N} : m = n + k$

$\leq$ è una relazione d'ordine se

$n \leq m \wedge m \leq k \Rightarrow n \leq k$ (transitiva)

$n \leq m \wedge m \leq n \Rightarrow n = m$ (antisimmetrica)

$n \leq n$ (riflessiva)

inoltre diremo che l'ordinamento è totale o lineare se

$$n \leq m \vee m \leq n$$

(Data $\leq$ si definisce $<$ e viceversa)

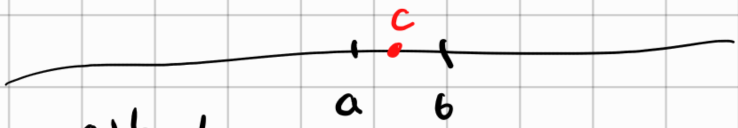
Un gruppo con un ordinamento si dice essere un **gruppo ordinato** se

$$x \le y \Rightarrow x+z \le y+z$$

$\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ sono gruppi ordinati.

Un ~~gruppo ordinato~~ ordinamento si dice essere **denso** se

$\forall \ a,b : \ a<b \Rightarrow \ \exists c : \ a<c<b$

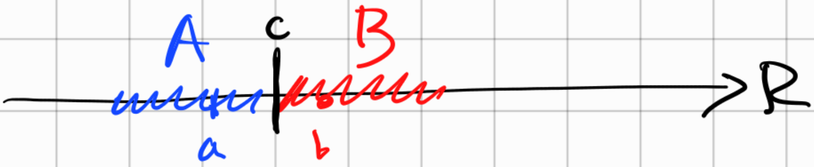


$\mathbb{Q}$ ha questa proprietà $a < \frac{a+b}{2} < b$ se $a<b$.

$\mathbb{Z}$ non ce l'ha.

(o Dedekind completo)

Diciamo che un ordinamento su R **continuo** se



dati $A, B \subseteq R$ se $A \le B$ (separati)

ovvero $\forall a \in A \ \forall b \in B \ a \le b$

allora esiste $c \in R$ tc

$A \le c \le B$ (elemento di separazione)

$\forall a \in A \ \forall b \in B \quad a \le c \le b$

$\mathbb{Q}$ non è continuo!

Es (Pitagora) L'equazione $x^2 = 2$ non ha soluzioni in $\mathbb{Q}$.

dim

Se fosse $x \in \mathbb{Q}$ $\quad x = \frac{p}{q} \quad p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}$
e posso supporre che p e q non abbiano fattori in comune.

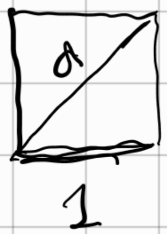
$$x^2 = 2 \qquad \frac{p^2}{q^2} = 2 \qquad p^2 = 2q^2$$

p^2 è pari (divisibile per 2) $\Rightarrow$ p è pari!

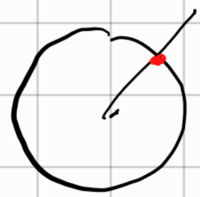
$$\Downarrow$$

q^2 è pari $\Leftarrow$ p^2 è divisibile per 4

assurdo perché p, q non hanno fattori in comune $\square$



$$d^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$



$A, B \subseteq \mathbb{Q}$ $\qquad A = \{a \in \mathbb{Q} : a^2 \leq 2\}$

$\qquad B = \{b \in \mathbb{Q} : b \geq 0,\ b^2 \geq 2\}$

$A \leq B$ ma se fosse $A \leq x \leq B$

$0 \leq a^2 \leq 2 \leq b^2 \Rightarrow a \leq b$

$$\Downarrow \qquad \square$$

$x^2 = 2$ No!