

# ANALISI MATEMATICA B

## LEZIONE 45 - 23.1.2026

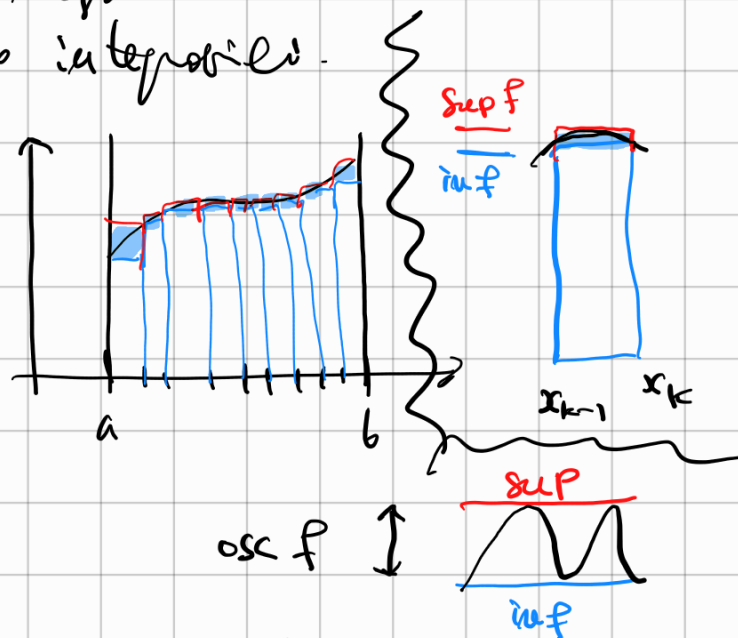
### INTEGRABILITA'

- le funzioni continue sono integrabili
- le funzioni monotone sono integrabili.

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , limitata e  
 $\mathbb{Q}$ -integrabile  $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$

$\exists P: a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$

$$S^*(f, P) - S_*(f, P) < \varepsilon$$



$$\begin{aligned} S^*(f, P) - S_*(f, P) &= \sum_{k=1}^N \left( \sup_{[x_{k-1}, x_k]} f - \inf_{[x_{k-1}, x_k]} f \right) \cdot (x_k - x_{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^N \underbrace{\text{osc } f}_{[x_{k-1}, x_k]} \cdot (x_k - x_{k-1}) \end{aligned}$$

$f$  continua:  $\forall x_k \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: |x - x_k| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_k)| < \varepsilon$   
 $\Rightarrow \text{osc } f_{[x_{k-1}, x_k]} < \varepsilon \quad \text{se} \quad |x_k - x_{k-1}| = \delta$

Se  $\text{osc } f_{[x_{k-1}, x_k]} < \varepsilon \Rightarrow S^*(f, P) - S_*(f, P) < \varepsilon \cdot (b-a)$

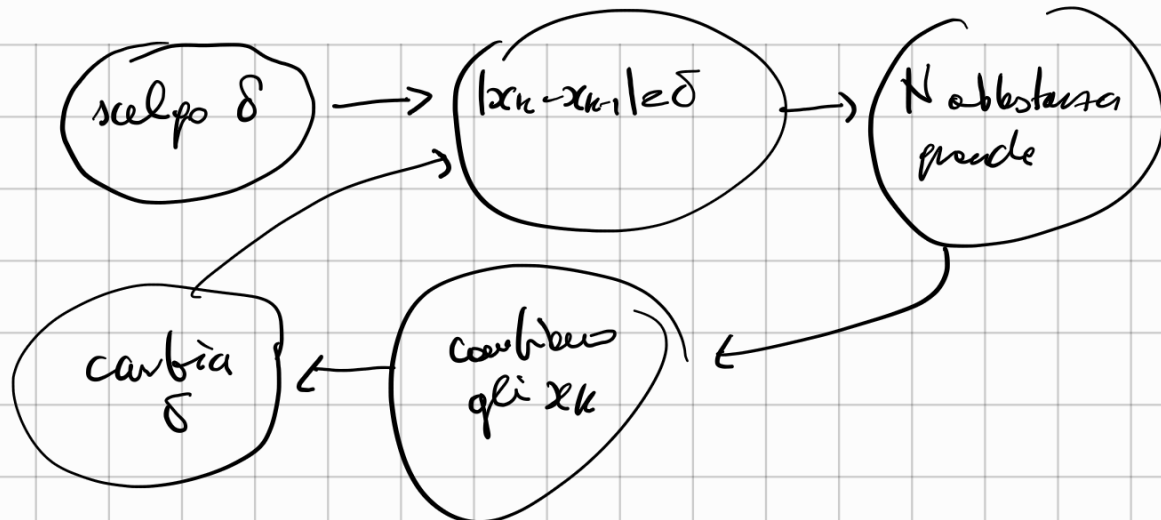
$\Downarrow$   
 $\varepsilon$  qualunque  
 $f$  integrabile.

PROBLEMA

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$

(PIA)

$\delta$  può dipendere da  $x_k \dots$



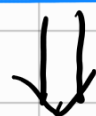
💡  $\delta$  non deve dipendere da  $x$ .

Def (uniforme continuità)  $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

è uniformemente continua se:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, x' \in A : |x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon$$

È DIVERSA DA  $f$  continua:



$$\forall x \in A \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x' \in A : |x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon$$

$$\exists \delta \forall x \dots \Rightarrow \forall x \exists \delta \dots$$

Teo  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  è uniformemente continua

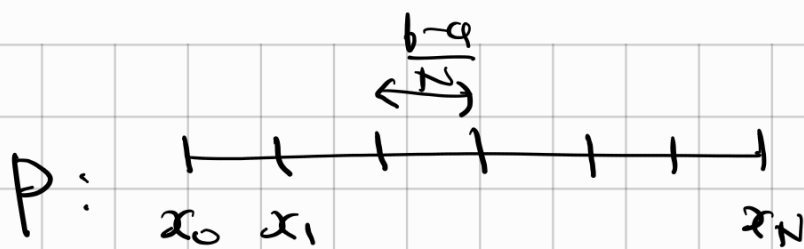
allora  $f$  è R-integrabile.

dim  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad |x - x'| < \delta \stackrel{(*)}{\Rightarrow} |f(x) - f(x')| < \varepsilon$

$$N > \frac{b-a}{\delta}$$

$$x_k = a + k \frac{b-a}{N}$$

$$x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{N} < \delta$$



$$x, x' \in [x_{k-1}, x_k] \Rightarrow |x - x'| < \delta \stackrel{(*)}{\Rightarrow} |f(x) - f(x')| = \varepsilon \quad \text{osc } f|_{[x_{k-1}, x_k]} \leq \varepsilon$$

$$\Downarrow \quad \sup f - \inf f = \varepsilon \quad \nearrow$$

$$f \text{ \u00e9 integrabile} \quad \Leftarrow \quad S^*(f, P) - S_*(f, P) \leq \varepsilon(b-a)$$

$\Updownarrow$   
criteri di integrabilit\u00e0

$f$  continua  $\stackrel{?}{\Rightarrow} f$  uniformemente continua

in generale **NO!**

Esempio  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = x^2$  \u00e9 continua  
ma non uniformemente.



$$\exists \varepsilon = 1 \quad \underbrace{\forall \delta > 0} \quad \exists x, x' : |x - x'| < \delta \quad \text{ma} \quad |x^2 - (x')^2| > 1$$

$$x' = x + \frac{\delta}{2}, \quad x > 0$$

$$|x^2 - (x')^2| = \left(x + \frac{\delta}{2}\right)^2 - x^2 = \cancel{x^2} + \delta x + \frac{\delta^2}{4} - \cancel{x^2}$$

$$= \delta \left(x + \frac{\delta}{4}\right) > 1$$

$$x + \frac{\delta}{4} > \frac{1}{\delta} \Leftrightarrow \exists x > \frac{1}{\delta} - \frac{\delta}{4}$$

Esempio 2  $f: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$   $f(x) = \sin(x^2)$

non è unif. continua



Esempio 3  $f: (0, 1] \rightarrow [-1, 1]$   $f(x) = \sin \frac{1}{x}$

non è unif. continua



teo  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua  $\Rightarrow$   $f$  è uniformemente continua  
 $\uparrow$  CHIUSO E LIMITATO  
(HEINE-CANTOR)

dim  $f$  continua

Supponiamo per assurdo  $f$  non sia uniformemente continua.

$\neg \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, x' \in [a, b] : |x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon$

$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x, x' \in [a, b] : |x - x'| < \delta \wedge |f(x) - f(x')| \geq \varepsilon$

scelgo  $\delta = \frac{1}{n}$   $x = x_n$   $x' = x'_n$   $|x_n - x'_n| < \frac{1}{n}$  e  $|f(x_n) - f(x'_n)| \geq \varepsilon$



Bolzano - Weierstrass  $x_n \in [a, b]$

COMPATTEZZA

$$\exists x_{n_k} \rightarrow x, \quad x \in [a, b]$$

$$|x'_{n_k} - x_{n_k}| < \frac{1}{n_k} \Rightarrow x'_{n_k} \rightarrow x$$

$\downarrow$   
 $x$

$$f \text{ continua} \Rightarrow \begin{cases} f(x_{n_k}) \rightarrow f(x) \\ f(x'_{n_k}) \rightarrow f(x) \end{cases}$$

$$|f(x_{n_k}) - f(x'_{n_k})| \rightarrow 0$$

ASSURDO

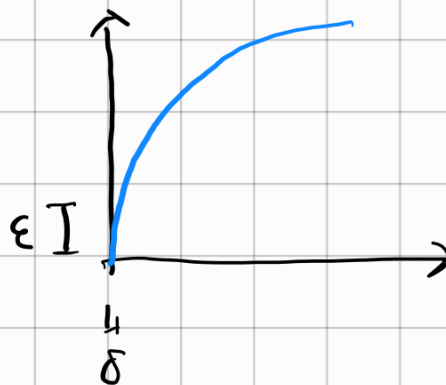


Esempio  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \sqrt{x}$$

è uniformemente continua.

□ provo a dimostrare  
che non lo è.

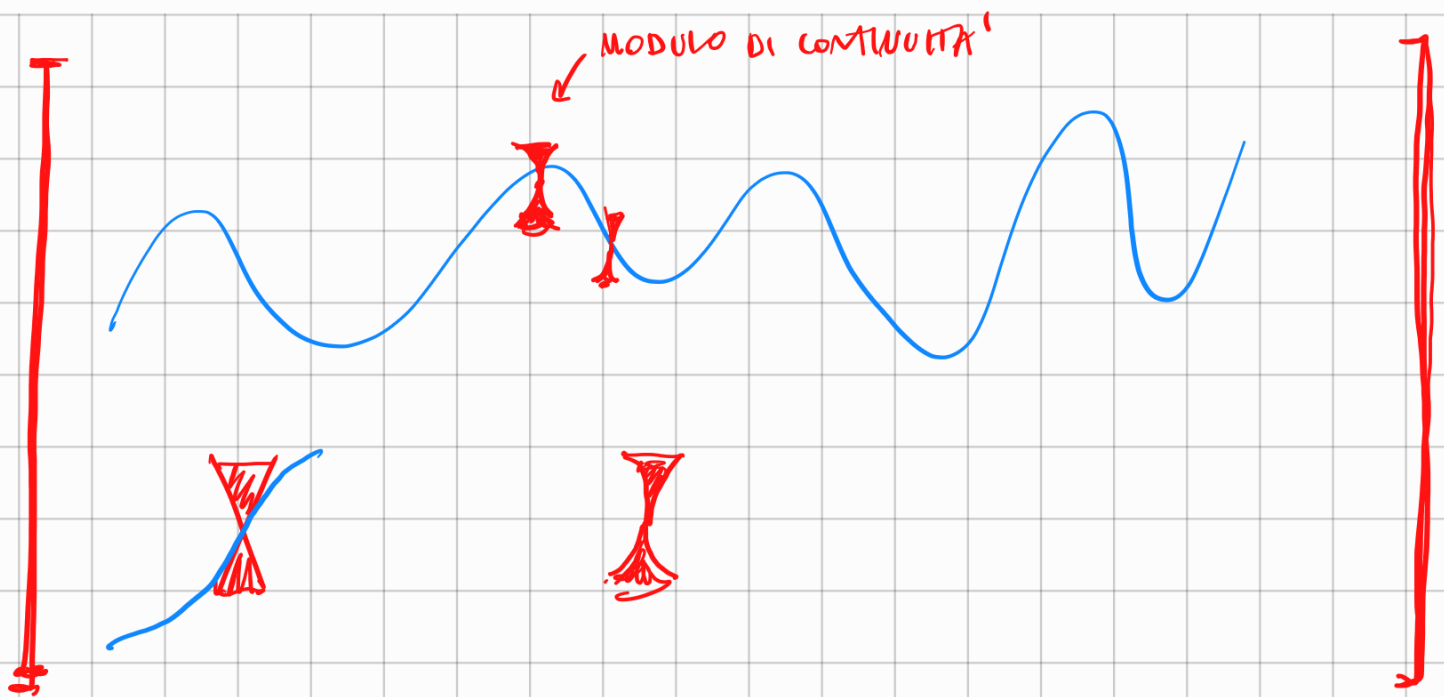


Esempio  $f(x) = x^2$   $f: [-1000, 1000]$

$f$  è uniformemente continua.

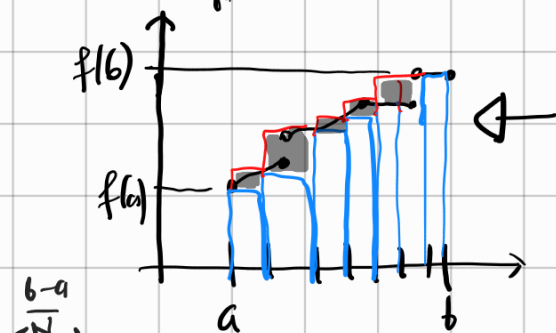
Corollario  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua

(è limitata per Weierstrass) è  $\mathbb{R}$ -integrabile  
e cioè è uniformemente continua.



Teo  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Se  $f$  è monotona allora  $f$  è limitata e  $\mathbb{R}$ -integrabile.

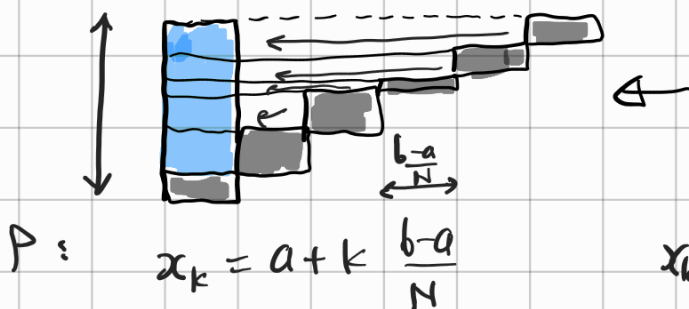
dim SPDC. supponiamo che  $f$  sia crescente  $x \geq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$



$$f(a) \leq f(x) \leq f(b)$$

$$\sup_{[x_{k-1}, x_k]} f = f(x_k)$$

$$\inf_{[x_{k-1}, x_k]} f = f(x_{k-1})$$



$$P: x_k = a + k \frac{b-a}{N}$$

$$x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{N}$$

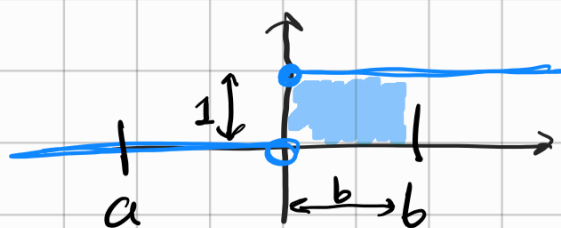
$$S^*(f, P) - S_*(f, P) = \left( \frac{b-a}{N} \right) \cdot (f(b) - f(a)) < \varepsilon$$

$$\text{se } N > \frac{(b-a)(f(b) - f(a))}{\varepsilon}$$

□

Es  $H(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$

(Heavy side)



$H$  è integrabile su ogni intervallo  $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$  in quanto crescente.

$\begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \end{cases}$

$$\int_a^b H(x) dx = \int_a^0 H(x) dx + \int_0^b H(x) dx$$

$$= \int_a^0 0 dx + \int_0^b 1 dx$$

$$= 0 + b = b$$

Teo (continuità dell'integrale)

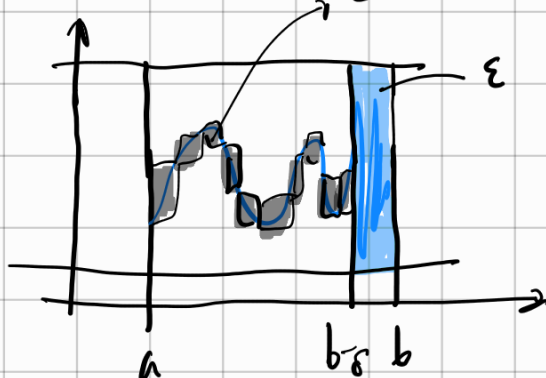
Sia  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  limitata tale che

$\forall \varepsilon > 0 \quad f: [a, b-\delta] \rightarrow \mathbb{R}$  sia R-integrabile.

Allora  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  è R-integrabile e vale

$$\int_a^b f = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_a^{b-\delta} f$$

dim



f limitata:

$$|f(x)| \leq M$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta:$$

$$\delta \cdot M < \varepsilon$$

□



Esempio  $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}$

è  $\mathbb{R}$ -integrabile su ogni  $[a, b]$

□

