

# ANALISI MATEMATICA B

## LEZIONE 46 - 26.1.2026

### Proprietà degli integrali [proprietà di reticolo]

teo Se  $f$  è limitata e  $\mathbb{R}$ -integrabile su  $[a, b]$   
allora anche  $|f|$  lo è.  
Non solo, anche  $f^+$  e  $f^-$ . Se  $g$  è  $\mathbb{R}$ -integrabile e  
anche  $f \vee g$ ,  $f \wedge g$  sono  $\mathbb{R}$ -integrabili.

lezione scorsa

(Nota: se  $f$  è continua  $|f|$  è continuo  $\Rightarrow |f|$  è  $\mathbb{R}$ -integrabile dunque in questo caso il teorema non serve)

dim

Basta mostrare che  $f^+$  è  $\mathbb{R}$ -integrabile.

$$y^+ = \begin{cases} y & \text{se } y \geq 0 \\ 0 & \text{se } y < 0 \end{cases} \quad y^- = \begin{cases} -y & \text{se } y \leq 0 \\ 0 & \text{se } y > 0 \end{cases}$$

$$y = y^+ - y^-$$



$f^+$   $\mathbb{R}$ -integrabile:  $f^- = (-f)^+$  è  $\mathbb{R}$ -integrabile

$|f| = f^+ + f^-$  è  $\mathbb{R}$ -integrabile

$$f \vee g = \frac{f+g + |f-g|}{2}, \quad f \wedge g = \frac{f+g - |f-g|}{2}$$

sono  $\mathbb{R}$ -integrabili.

Basta mostrare che  $f^+$  è R-integrabile.

$$S^*(f, P) - S_*(f, P) = \sum_{k=1}^N \operatorname{osc}_f(x_{k-1}, x_k) \cdot (x_k - x_{k-1})$$

$$\operatorname{osc}_A f = \sup_A f - \inf_A f$$

$$\operatorname{osc} f^+ \leq \operatorname{osc} f \Rightarrow f \text{ R-integrabile} \\ \Downarrow \\ f^+ \text{ R-integrabile.}$$

(ma anche  $\operatorname{osc} |f| \leq \operatorname{osc} f \dots$ ) □

Oss [il viceversa non è vero]

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ -1 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \quad f \text{ non è R-integrabile}$$

ma  $|f(x)| = 1 \quad \forall x \Rightarrow |f|$  è R-integrabile.

Ancora più in generale (NON CI SERVIRÀ)

Teo Se  $f$  è  $\mathbb{R}$ -integrabile e  $g$  continua

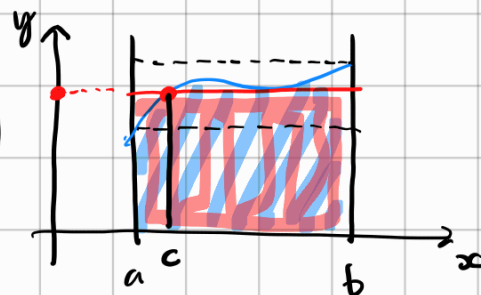
allora  $g \circ f$  è R-integrabile

dim più complicata... (vedi appunti)

# Teorema fondamentale del calcolo

teo (media integrale)

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua (quindi integrabile)



$$\boxed{\int_a^b f} = \boxed{\int_a^b f}$$

$$\boxed{\frac{\int_a^b f}{b-a}} = f(c)$$

$$\exists c \in [a, b]$$

dim  $M = \max_{[a, b]} f$   $m = \min_{[a, b]} f$  (per Weierstrass esist.)

$$m \cdot (b-a) \leq \int_a^b f \leq \int_a^b M = M \cdot (b-a)$$

$$m \leq \frac{\int_a^b f}{b-a} \leq M$$

$\rightarrow$  è un valore intermedio tra  $m$  e  $M$

Per il teorema dei valori intermedi  $\exists c$  t.c.  $\frac{\int_a^b f}{b-a} = f(c)$   $\square$

Notazione:  $\frac{\int_a^b f}{b-a} = \int_a^b f$   $\leftarrow$  valor medio.

Teo [Tonelli-Banach: teo fondamentale del calcolo]

Sia  $I \subseteq \mathbb{R}$  un intervallo,  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  continua.

Fissato  $x_0 \in I$ , definisco la FUNZIONE INTEGRALE

$$F(x) = \int_{x_0}^x f = \int_{x_0}^x f(t) dt, \quad F: I \rightarrow \mathbb{R}$$

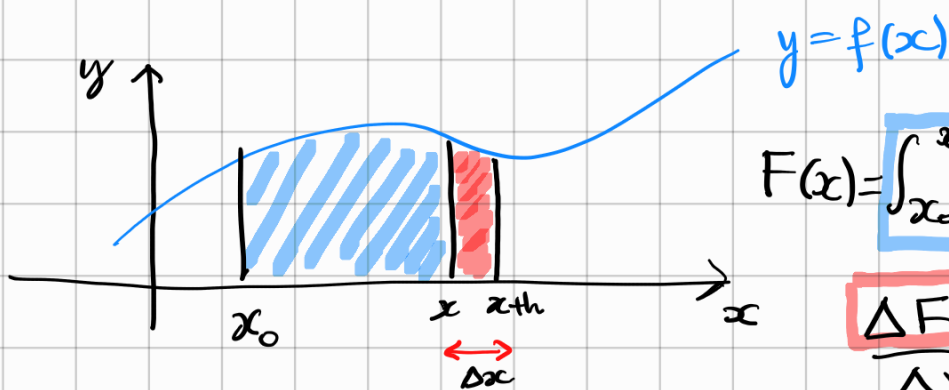
$f$  continua su  $I \Rightarrow f$  continua su  $[x_0, x] \Rightarrow f$   $\mathbb{R}$ -integrabile su  $[x_0, x]$ .

NOTA può anche essere  $x < x_0$

Allora  $F$  è derivabile (anzi  $C^1$ )

$$F'(x) = f(x)$$

$$\forall x \in I.$$



$$F(x) = \int_{x_0}^x f$$

$$\frac{\Delta F}{\Delta x} = f$$

lim

$$\left[ F(x) = \int_{x_0}^x f \right]$$

$x_0 \in I$  fissato,  $x \in I$  qualunque

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{\int_{x_0}^{x+h} f - \int_{x_0}^x f}{h} = \frac{\int_x^{x+h} f}{h} = f(c(h)) \xrightarrow{h \rightarrow 0} f(x)$$

$\uparrow$  additività  
 $\uparrow$  media integrale  
 $\exists c(h) \in [x, x+h]$

$c(h) \rightarrow x$   
 $f$  continuo

## SECONDA PARTE

### Formula fondamentale del calcolo

Stesse ipotesi di prima. Inoltre sia  $G: I \rightarrow \mathbb{R}$  una qualunque funzione derivabile tale che

$$G'(x) = f(x)$$

$\forall x \in I$  (primitiva)

Allora, dati  $a, b \in I$  si ha

$$\boxed{\int_a^b f = G(b) - G(a)}$$

$$=: [G]_a^b = G \Big|_a^b$$

$$= G(x) \Big|_{x=a}^b$$

dimostrare Sia  $x_0$  come nella prima parte. (potrebbe essere)  $x_0 = a$

Also  $\int_a^b f = \int_{x_0}^b f - \int_{x_0}^a f = F(b) - F(a)$

Multa sapere che  $F'(x) = f(x)$  ( $F$  é uma primitiva)

Ma so  $G'(x) = f(x)$

PRIMA PARTE DEL  
TEOREMA.

$$(H = G - F) \quad H' = G' - F' = f - f = 0$$

allora  $H$  è costante  
perché  $I$  è un intervallo

per i criteri di monotonia)  
 $H' \geq 0$  e  $H' \leq 0 \Rightarrow H$  crescente e decrescente  
 ↗ ↘  
logaritmico costante

$H(x) = c$ , costante.

$$G(b) - G(a) \stackrel{J}{=} F(b) + \cancel{h(b)} - F(a) - \cancel{h(a)} = F(b) - F(a)$$

$$\int_a^b f$$

D

Esays

$$\int_a^b x^2 dx = \left[ \frac{x^3}{3} \right]_a^b$$

$$= \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3} = \frac{1}{3}(b^3 - a^3)$$

$$G'(x) = x^2 \iff G(x) = \frac{x^3}{3}$$

VEDI L'ESERCIZIO  
FATTO CON LA  
DEFINIZIONE

$$\sum k^2$$

Esays

$$\int_0^1 e^x dx = [e^x]_0^1$$

$$= e^1 - e^0 = e - 1.$$

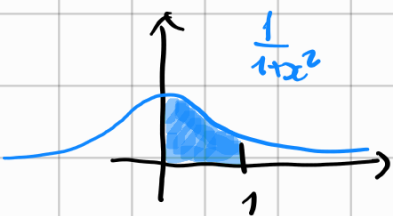
$$(e^x)' = e^x$$

Esempio

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = [\arctan x]_0^1 \quad \frac{1}{1+x^2} = D \arctan x$$

$$= \arctan 1 - \arctan 0$$

$$= \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$$

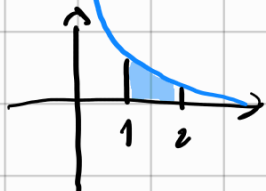


Esempio

$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx = [\ln x]_1^2 = \ln 2 - \ln 1$$

$$= \ln 2.$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$



## LA RICERCA DELLA PRIMITIVA

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^3} dx = ? \quad \int_0^1 \frac{1}{x \ln x} dx = ? \quad \int_0^1 \frac{1}{1+e^x} dx = ?$$

$$\int_0^1 \sin^2 x dx = ?$$

Data  $f$ .

Come trovo una funzione  $G$  che ha derivata  $f$ ?

Def Diremo che  $G$  è una PRIMITIVA di  $f$

$$se \quad G'(x) = f(x) \quad \forall x.$$

$$G \xrightarrow{D} f$$

$$\leftarrow \int_{x_0}^x f$$

Notazione: INTEGRALE INDEFINITO

$$\int f = \int f(x) dx = \{ \text{tutte le primitive di } f \}$$

$$= D^{-1}(\{f\})$$

$$= \{ G \text{ derivabili} : G' = f \}$$

Nota

$$\int 0 = \text{Ker } D.$$

$$D \text{ è un operatore lineare.}$$

$$\supseteq \{ \text{costanti} \} \cong \mathbb{R}$$

$$= \text{se siamo su un intervallo}$$

Esempio Trovare  $\int \frac{1}{x} dx$

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x} \quad \ln|x| \in \int \frac{1}{x} dx$$

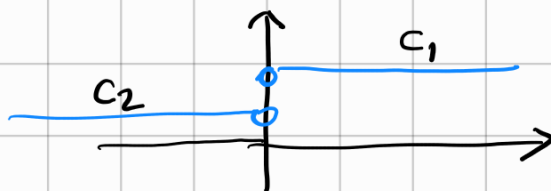
$$\ln|x| + c$$

$$\ln|x| + c \in \int \frac{1}{x} dx \quad \forall c \in \mathbb{R}.$$



$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + \int 0$$

$$f(x) = \begin{cases} c_1 & \text{per } x > 0 \\ c_2 & \text{per } x < 0 \end{cases}$$



$$\int \frac{1}{x} dx = \begin{cases} \ln|x| + c_1 & \text{per } x > 0 \\ \ln|x| + c_2 & \text{per } x < 0 \end{cases} \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Su  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  dim ker  $D = 2$ .

## QUESTIONE di NOTAZIONI

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{INSIEME DI FUNZIONI!} \\ \text{FUNZIONI} \end{array}$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \{ \ln|x| + c, c \in \mathbb{R} \}$$

$$\int \frac{1}{x} dx \ni \ln|x|$$



$\leftarrow$  non sono  
 $\leftarrow$  frasi  
corrette

$$\begin{array}{l} \text{già } x \in x + o(x) \\ o(x^2) \subseteq o(x) \end{array}$$

