

# ANALISI MATEMATICA B

## LEZIONE 4B - 30.1.2026

### Calcolo delle primitive.

$$(F \cdot g)' = F' \cdot g + F \cdot g'$$

$$F \cdot g = \int F' \cdot g + \int F \cdot g'$$

$$\int F' g = F \cdot g - \int F g'$$

$$f = F'$$

$$\int f \cdot g = F \cdot g - \int F \cdot g'$$
$$F = \int f.$$

PER PARTI

Esempio

$$\int x \cdot \cos x \, dx = x \cdot \sin x - \int 1 \cdot \sin x \, dx$$

$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow \\ \text{deriv} & \text{integr} \\ g(x) & f(x) \end{matrix}$

$$= x \sin x + \cos x$$

Esercizio

$$\int x^2 e^x \, dx, \quad \int x^2 \sin x \, dx$$

~

Esempio

$$\int \ln|x| dx = \int \underset{\substack{\uparrow \\ \text{integro}}}{1} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{derivo}}}{\ln|x|} dx = x \cdot \ln|x| - \int x \cdot \frac{1}{x} dx$$

$$= x \ln|x| - x$$

VERIFICA

$$(x \ln|x| - x)' = \ln|x| + x \cdot \frac{1}{x} - 1$$

Esempio

$$\int \arctan x dx = \int \underset{\substack{\uparrow \\ \text{integro}}}{1} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{derivo}}}{\arctan x} dx =$$
$$= x \cdot \arctan x - \int x \cdot \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$= x \cdot \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} dx$$

è della forma  $\int f(g(x)) g'(x) dx = \int f(y) dy$

$$\left\{ \begin{array}{l} y = g(x) \\ dy = g'(x) dx = dg(x) \end{array} \right. = \int f dg$$

differentiale di g

$$\int \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+x^2} d(1+x^2)$$
$$= \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$$
$$= x \cdot \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$$

## Esercizio

$$\begin{aligned}\int \arcsin x \, dx &= \int 1 \cdot \arcsin x \, dx \\&= x \arcsin x - \int x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx \\&= x \arcsin x + \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, d(1-x^2) \\&= x \arcsin x + \cancel{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{1-x^2}}{\cancel{\frac{1}{2}}} \\&= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}.\end{aligned}$$

$$d(1-x^2) = -2x \, dx$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{y}} \, dy$$

$$\int y^{-\frac{1}{2}} \, dy = \frac{y^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}$$

## Esercizio

$$\int \arccos x \, dx = \dots$$



Integrazione per parti ricorsiva.

## Esercizio

(\*)

$$\boxed{\int e^x \cdot \cos x \, dx} = e^x \sin x - \int e^x \sin x \, dx$$

↑            ↑                    ↑            ↑  
deriva    integra                deriva    integra

$$= e^x \sin x - \left[ \int e^x (-\cos x) - \int e^x (-\cos x) \, dx \right]$$

$$= e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x dx$$

$$2 \int e^x \cos x dx = e^x \sin x + e^x \cos x$$

$$\int e^x \cos x dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x)$$

Proviamo a farlo sbagliato:

$$\int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx$$

↑            ↑  
integrando   derivando

$$= \cancel{e^x \sin x} - \int \cancel{e^x \sin x} - \int e^x \cos x dx$$

$$= \int e^x \cos x dx \dots \text{identità inutile!}$$

Esercizio  $\square$

$$\int e^x \sin x dx$$

$$\int \sin x \cos x dx$$

## Esercizio (tutta volta!)

$$\begin{aligned}\int \cos^2 x \, dx &= \int \cos x \cdot \cos x \, dx \\&= \cos x \cdot \sin x - \int (-\sin x) \sin x \, dx \\&= \cos x \sin x + \int \sin^2 x \, dx \\&= \sin x \cos x + \int (1 - \cos^2 x) \, dx \\&= \sin x \cos x + x - \int \cos^2 x \, dx \\ \int \cos^2 x \, dx &= \frac{1}{2} \left[ \sin x \cos x + x \right] \quad \square\end{aligned}$$

$$\left[ 2 \sin x \cos x = \sin(2x) \right]$$

## Esempio

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x \ln x} \, dx &= \int \overset{\text{integro}}{\frac{1}{x}} \cdot \overset{\text{deriva}}{\frac{1}{\ln x}} \, dx \\&= \cancel{\ln x} \cdot \frac{1}{\cancel{\ln x}} - \int \cancel{\ln x} \cdot \left( -\frac{\frac{1}{x}}{\ln^2 x} \right) dx\end{aligned}$$

$$= 1 + \int \frac{1}{x \ln x} dx \quad \text{🤪}$$

l'insieme delle primitive non cambia  
se ci aggiungiamo una costante.

METODO GIUSTO

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x \ln x} dx &= \int \frac{1}{\ln x} d \ln x \\ &= \ln |\ln x| \end{aligned}$$

---

Esercizio  $\Delta$

$$\int \text{tantino } d \text{ cavallo} = \log |\text{cavallo}|$$

---



# INTEGRALE DI FUNZIONI RAZIONALE

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx \quad P, Q \text{ polinomi}$$

Casi base:  $\int \frac{1}{x} = \ln|x|$   $\int \frac{1}{1+x^2} = \arctan x$

Procediamo mediante esempi per intuire la strategia generale.

Esempio  $\int \frac{x^3+1}{x-1} dx$   $\deg P \geq \deg Q$

$P(x) = x^3+1$   
 $Q(x) = x-1$

Si fa la divisione tra polinomi:

$$\begin{array}{r} x^3+1 \overline{) x-1} = x^2+x+1 \\ \underline{x^3-x^2} \phantom{+1} \\ x^2+1 \\ \underline{x^2-x} \phantom{+1} \\ x+1 \\ \underline{x-1} \\ 2 \end{array}$$
$$x^3+1 = (x-1)(x^2+x+1) + 2$$

Dividendo      Divisore      Quoziente      Resto

VERIFICA:  $x^3 + \cancel{x^2} + \cancel{x} - \cancel{x^2} - \cancel{x} - 1 + 2 = x^3 + 1$  ✓

$$\int \frac{x^3+1}{x-1} dx = \int \frac{(x-1)(x^2+x+1) + 2}{x-1} dx$$

$$= \int (x^2+x+1) dx + \int \frac{2}{x-1} dx$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + 2 \ln|x-1|$$

Nota  $\left. \begin{array}{l} \deg Q = 1 \\ \deg P < \deg Q \end{array} \right\} \Rightarrow \deg P = 0$

$$\Rightarrow \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{c}{ax+b}$$

$$\int \frac{c}{ax+b} = \frac{c}{a} \ln|ax+b|$$

Esempio 2

$$\int \frac{x+1}{x^2-x} dx$$

$$\frac{x+1}{x^2-x} = \frac{x+1}{x(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1}$$

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1) + Bx}{x(x-1)} \stackrel{!}{=} \frac{x+1}{x(x-1)}$$

       = combinazione lineare di  
due polinomi di grado 1

$$\mathbb{R}[x]_{\leq n} = \{ \text{polinomi di grado } n \}$$

$$\dim \mathbb{R}[x]_{\leq n} = n+1.$$



se i polinomi  $x, x-1$  sono indipendenti:  
il metodo funziona.

Ci aspettiamo che il seguente sistema  
abbia soluzione unica:

$$A(x-1) + Bx \stackrel{!}{=} x+1$$

$$(A+B)x - A = 1x + 1$$

$$\begin{cases} A+B = 1 \\ -A = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} B = 1 - (-1) = 2 \\ A = -1 \end{cases}$$

$$\int \frac{x+1}{x(x-1)} dx = \int \frac{A}{x} dx + \int \frac{B}{x-1} dx$$

$$= - \int \frac{1}{x} dx + 2 \int \frac{1}{x-1} dx$$

$$= - \ln|x| + 2 \ln|x-1|$$

$$= \ln \frac{(x-1)^2}{|x|}$$

ERA: denominatore di grado 2,  $\Delta > 0$ .

ricardus ora  $\Delta = 0$

Esempio  $\int \frac{x-1}{x^2+2x+1} dx = \int \frac{x-1}{(x+1)^2} dx$

$$\frac{x-1}{(x+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2}$$
$$= \frac{A(x+1) + B}{(x+1)^2}$$

Trovo A e B .....  $\begin{cases} A = 1 \\ B = -2 \end{cases}$

$$\int \frac{x-1}{(x+1)^2} dx = \int \frac{1}{x+1} dx - 2 \int \frac{1}{(x+1)^2} dx$$

$$= \ln|x+1| + 2 \frac{1}{x+1}$$

$\Delta < 0$   ricardus a  $\frac{1}{x^2+1}$  oppure  $\frac{2x}{x^2+1}$

Esempio

$$\int \frac{x+2}{x^2+2x+3} dx$$

$$\underbrace{x^2+2x+3}_{= (x+1)^2 + 2} = (x+1)^2 + 2$$

$$= (x^2+2x+1) + 2$$

$$= (x+1)^2 + 2$$

$$= 2 \left( \left( \frac{x+1}{\sqrt{2}} \right)^2 + 1 \right)$$

$$D(x^2+2x+3) = 2x+2$$

$$x+2 = \frac{1}{2} D(x^2+2x+3) + 1$$

$$\int \frac{x+2}{x^2+2x+3} dx = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+2x+3)}{x^2+2x+3} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1} dx$$

$$= \frac{1}{2} \ln|x^2+2x+3| + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)$$