

ANALISI MATEMATICA 3

LEZIONE 49 - 2.2.2026

Sostituzioni che riconducono a funzioni razionali

$$f(x) = R(e^{\lambda x})$$

$$\lambda \in \mathbb{R}$$

$$R(t) = \frac{P(t)}{Q(t)}$$

P, Q polinomi

Per "risolvere" $\int f(x) dx$ si può fare la sostituzione:

$$\begin{cases} e^{\lambda x} = t \\ x = \frac{\ln t}{\lambda} \\ dx = \frac{1}{\lambda t} dt \end{cases}$$

Nota $e^{2\lambda x} = (e^{\lambda x})^2$

$$\int f(x) dx = \int R(e^{\lambda x}) dx = \int \underbrace{R(t)}_{\text{funzione razionale in } t} \frac{1}{\lambda t} dt$$

*è funzione razionale
in t ... si calcola.*

Esempio $\int \frac{2\sqrt{e^x} + e^{2x}}{e^x - 4} dx = \int \frac{2e^{\frac{x}{2}} + (e^{\frac{x}{2}})^4}{(e^{\frac{x}{2}})^2 - 4} dx$

$$\lambda = \frac{1}{2} \quad \begin{cases} t = e^{\frac{x}{2}} \\ x = 2 \ln t \\ dx = \frac{2}{t} dt \end{cases}$$

$$= \int \frac{2t + t^4}{t^2 - 4} \cdot \frac{2}{t} dt$$

$$= 2 \int \frac{2 + t^3}{t^2 - 4} dt = 2 \int \left[t + \frac{4t + 2}{t^2 - 4} \right] dt$$

$$\left. \begin{array}{l} t^3 + 2 \mid t^2 - 4 = t \\ \underline{t^3 - 4t} \\ 4t + 2 \end{array} \right\}$$

$$\begin{cases} A + B = 4 \\ 2B - 2A = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2A + 1 = 4 \\ B = A + 1 \end{cases} \quad \begin{cases} A = 3/2 \\ B = 5/2 \end{cases}$$

$$\frac{4t+2}{t^2-4} = \frac{A}{t+2} + \frac{B}{t-2} = \frac{At - 2A + Bt + 2B}{t^2-4}$$

$$= \frac{(A+B)t + 2B - 2A}{t^2-4}$$

$$= \frac{3}{2} \frac{1}{t+2} + \frac{5}{2} \frac{1}{t-2}$$

$$= t^2 + 3 \cdot \ln(t+2) + 5 \ln(t-2)$$

$$= t^2 + \ln(t+2)^3 (t-2)^5$$

$$= t^2 + \ln(t^2-4)^3 (t-2)^2$$

$$= e^x + \ln(e^x-4)^3 (\sqrt{e^x}-2)^2$$



FUNZIONI RAZIONALI "QUADRATICHE" IN $\sin, \cos$.

$$f(x) = R(\sin^2 x, \cos^2 x, \sin x \cos x)$$

$$R(s, c, t) = \frac{P(s, c, t)}{Q(s, c, t)}$$

$$\int f = ?$$

$$t = \tan x \quad 1+t^2 = 1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2} \\ \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2} \\ \sin x \cos x = \frac{t}{1+t^2} \\ dx = \frac{1}{1+t^2} dt \end{array} \right. \quad x = \arctan t$$

Esempio

$$\begin{aligned} & \int \frac{1}{\cos x (\sin x + \cos x)} dx = \\ &= \int \frac{1}{\sin x \cos x + \cos^2 x} dx \\ &= \int \frac{1}{\frac{t}{1+t^2} + \frac{1}{1+t^2}} \cdot \frac{1}{1+t^2} dt \\ &= \int \frac{1}{t+1} dt = \ln |t+1| = \ln |\tan x + 1| \end{aligned}$$

MA $\int \cos^2 x dx$ diventerebbe troppo complicata,
non sempre questa sostituzione è la cosa migliore

FUNZIONI RAZIONALI IN $\sin x, \cos x$

$$f(x) = R(\cos x, \sin x) \quad R(c, s) \text{ razionale}$$

$$\int f(x) dx$$

$$t = \tan \frac{x}{2}$$

$$x = 2 \arctan t$$

$$\begin{cases} \cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ \sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = \frac{2t}{1+t^2} \\ dx = \frac{2}{1+t^2} dt \end{cases}$$

Formula di
Weierstrass

Esempio

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2} dt$$

$$= \int \frac{1}{t} dt = \ln |t| = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right|$$

FUNZIONI RAZIONALI CON RADICALI

$$f(x) = R(\sqrt[n]{x}) \quad R(t) \text{ razionale}$$

$$\int f(x) dx = ?$$

$$\begin{cases} t = \sqrt[n]{x} \\ dx = n t^{n-1} dt \end{cases} \quad x = t^n$$

Esempio $\int \frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} dx =$ ($x > 0$)

$$\left[\begin{array}{l} n=12 \\ \begin{cases} t = \sqrt[12]{x} \\ dx = 12 t^{11} dt \end{cases} \end{array} \right] \quad x = t^{12} \quad \left[\begin{array}{l} \sqrt[4]{x} = x^{1/4} = x^{3/12} \\ \sqrt{x} = x^{1/2} = x^{6/12} \\ \sqrt[3]{x} = x^{1/3} = x^{4/12} \end{array} \right] \quad n=12$$

$$= \int \frac{t^3}{t^6 + t^4} \cdot 12 t^{11} dt$$

$$= 12 \int \frac{t^{10}}{t^2+1} dt = 12 \int \left[t^8 - t^6 + t^4 - t^2 + 1 - \frac{1}{t^2+1} \right] dt$$

$$\begin{array}{r} t^{10} \\ t^{10} + t^8 \\ \hline -t^8 \\ +t^8 - t^6 \\ \hline t^6 \\ t^6 + t^4 \\ \hline -t^4 \\ -t^4 - t^2 \\ \hline t^2 \\ t^2 + 1 \\ \hline -1 \end{array} \quad \boxed{t^2+1 = t^8 - t^6 + t^4 - t^2 + 1}$$

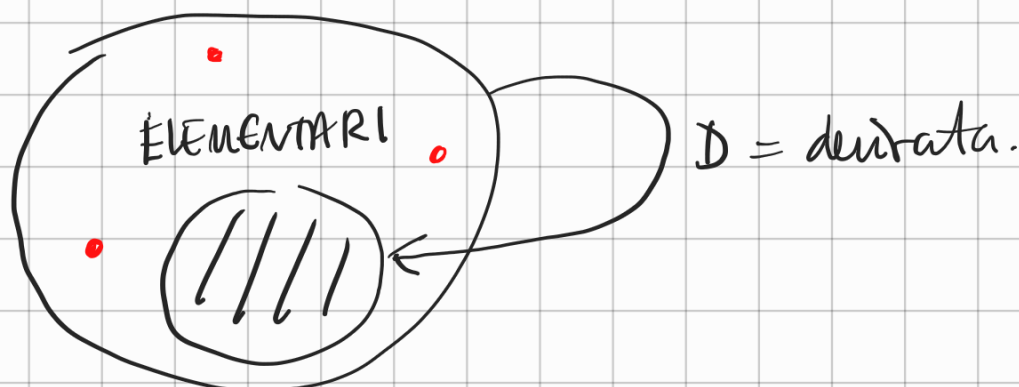
$$= \frac{12}{9} t^9 - \frac{12}{7} t^7 + \frac{12}{5} t^5 - \frac{12}{3} t^3 + 12t - 12 \arctan t$$

$$= \frac{4}{3} \sqrt[4]{x^3} - \frac{12}{7} \sqrt[12]{x^7} + \frac{12}{5} \sqrt[12]{x^5} - 4 \sqrt[4]{x} + 12 \sqrt[12]{x} - 12 \arctan \sqrt[12]{x}$$

FUNZIONI SPECIALI

Ci sono funzioni ELEMENTARI la cui primitiva NON è una funzione elementare.

FUNZIONI ELEMENTARI: potenze, radici, esponenziale, logaritmo, funzioni trigonometriche (e inverse) e le loro composizioni: somma, prodotto ...



Esempi di funzioni elementari la cui primitiva non è elementare

$$e^{x^2}, e^{-x^2}$$

FUNZIONI SPECIALI

$$\rightsquigarrow \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

(Terme Liouville)

$$\operatorname{erf}' x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$$

$$\frac{1}{\ln x} \rightsquigarrow \operatorname{li} x \text{ (logaritmo integrale)}$$

$$\frac{e^x}{x} \rightsquigarrow \operatorname{ei} x \text{ (esponenziale integrale)}$$

$$\frac{\sin x}{x} \rightsquigarrow \text{Si } x \quad (\text{seno integrale})$$

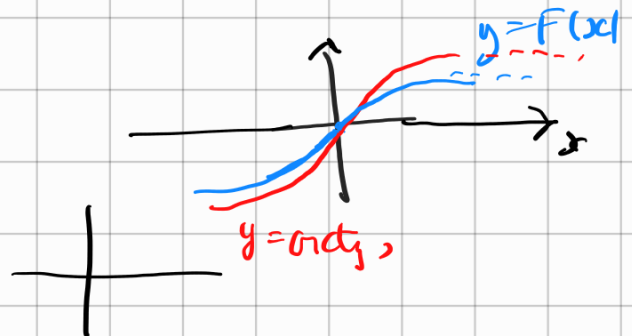
$$\sin x^2 \rightsquigarrow \text{Si } x$$

Esempio: dimostrare che $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x e^{-t^2} dt$ esiste ed è finito.

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt, \quad F(0) = 0$$

$$F'(x) = e^{-x^2} \quad \& \text{ teo fondamentale}$$

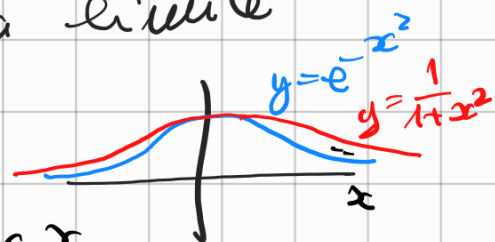
x	$\frac{0}{ }$
$F'(x)$	$+ \textcircled{1} +$
$F(x)$	$\swarrow \text{flesso} \searrow$
	obliquo



① $F(x)$ è crescente dunque ha limite

② Per dire che è finito

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt \leq \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$$



$$e^x \geq 1+x$$

$$e^{x^2} \geq 1+x^2$$

$$e^{-x^2} \leq \frac{1}{1+x^2}$$

$$= \arct x \leq \frac{\pi}{2}$$

$\Rightarrow F(x)$ è limitata
 $\Rightarrow$ il limite è finito $\square$

INTEGRALE IMPROPRI

• (GENERALIZZATI)

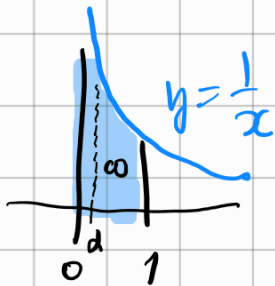
$$\int_a^b f(x) dx$$

dove f non è limitata
oppure a, b non sono finiti

ES 1 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \doteq \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_0^{\beta} e^{-x^2} dx \in \mathbb{R}$



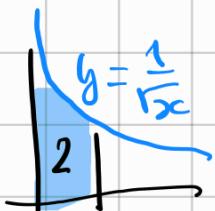
ES 2 $\int_0^1 \frac{1}{x} dx \doteq \lim_{d \rightarrow 0^+} \int_d^1 \frac{1}{x} dx$



$$= \lim_{d \rightarrow 0^+} \left[\ln x \right]_d^1$$

$$= \lim_{d \rightarrow 0^+} (-\ln d) = +\infty$$

ES 3 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{d \rightarrow 0^+} \int_d^1 x^{-\frac{1}{2}} dx$



$$= \lim_{d \rightarrow 0^+} \left[\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right]_d^1 = \lim_{d \rightarrow 0^+} (2 - 2\sqrt{d})$$

$$= 2$$

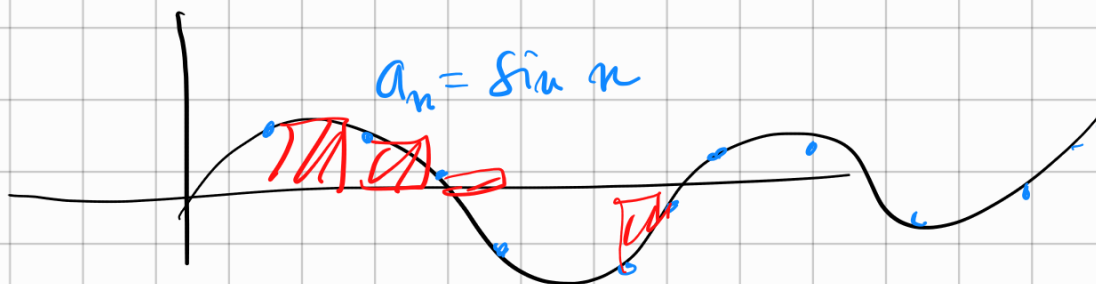
ES 4

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ é finita $\Leftrightarrow p > 1$.

ii
 $\lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_1^{\beta} \frac{1}{x^p} dx$

Análogo A:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$$



$$\sum_{n=0}^N a_n = a_0 + a_1 + \dots + a_N$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{N \rightarrow \infty} (a_0 + \dots + a_N)$$

$$\sum \sin n = ?$$