

ANALISI MATEMATICA B

LEZIONE 50 - 4.2.2026

INTEGRALI IMPROPRI (o GENERALIZZATI)

l'integrale di Riemann che abbiamo già definito $\int_a^b f(x) dx$ richiede

che $a, b \in \mathbb{R}$ e f sia limitata

Se f non è limitata e/o $a, b \in \{\pm\infty, -\infty\}$

si parla di **integrale improprio**:

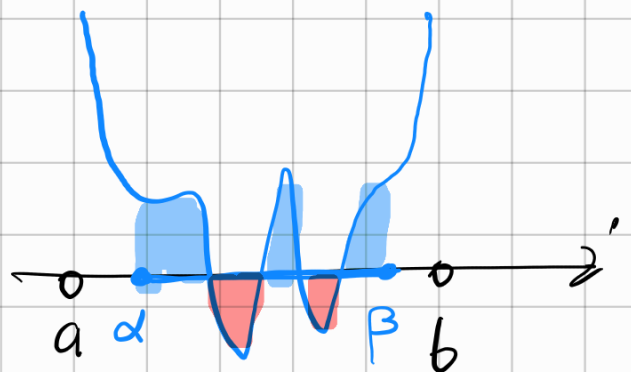
Prendiamo $a, b \in [-\infty, +\infty]$ ($a \leq b$)

$$f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$$

diremo che f è **localmente R-integrabile**

se f è limitata e R-integrabile su

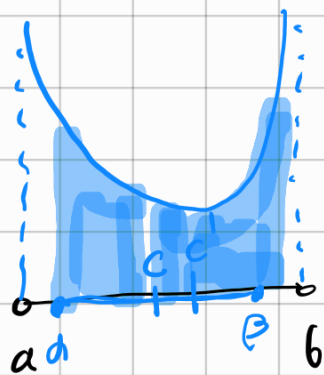
ogni $[\alpha, \beta] \subseteq (a, b)$.



In tal caso posso definire:

$$\int_a^b f = \left(\lim_{\alpha \rightarrow a^+} \lim_{\beta \rightarrow b^-} \int_{\alpha}^{\beta} f \right)$$

$$= \lim_{\alpha \rightarrow a^+} \int_{\alpha}^c f + \lim_{\beta \rightarrow b^-} \int_c^{\beta} f$$



con $c \in (a, b)$ qualunque.

(Per l'additività dell'integrale il risultato non dipende da c)

Ognuno dei due limiti potrebbe non esistere. E se esiste potrebbe essere infinito.

Se entrambi i limiti sono infiniti

potrebbero essere $(+\infty) + (-\infty)$ o $(-\infty) + (+\infty)$

e allora la somma non è definita.

① Se entrambi i limiti sono finiti

diciamo che l'integrale **CONVERGE**

② Se entrambi i limiti esistono e la somma è definita (Non infiniti di segno opposto)

allora diremo che l'integrale **ESISTE**.

Se tale somma è infinita ($+\infty$ o $-\infty$) diremo

che l'integrale **DIVERGE**

③ Negli altri casi diremo che l'integrale **NON ESISTE**.

Diremo che una funzione f è

INTEGRABILE IN SENSO IMPROPRIO

sull'intervallo (a, b) se

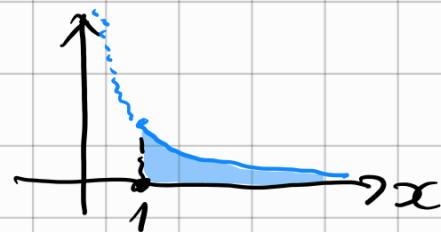
(2 possibilità):

① Se l'integrale converge.

~~② Se l'integrale esiste~~

Esempio 1

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx \quad \text{CONVERGE}$$



Infatti:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{\alpha \rightarrow 1^+} \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{x^2} dx =$$

$$\left(\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_{\alpha}^{\beta} = -\frac{1}{\beta} - \left(-\frac{1}{\alpha} \right) \right)$$

$$= \lim_{\alpha \rightarrow 1^+} \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} \right) = \lim_{\alpha \rightarrow 1^+} \frac{1}{\alpha} = 1$$

Oss Le funzioni continue sono tutte localmente $\mathbb{R}$ -integrabili.
 — Weierstrass $\Rightarrow f$ è limitata su $[\alpha, \beta]$
 \ Integrità $\Rightarrow f$ è $\mathbb{R}$ -integrabile su $[\alpha, \beta]$
 fn. continuo

NOTAZIONI

asb $\left[F(x) \right]_a^b \stackrel{\text{definizione!}}{=} \lim_{\alpha \rightarrow a^+} \lim_{\beta \rightarrow b^-} (F(\beta) - F(\alpha))$

ma avere già definito $\left[F(x) \right]_a^b = F(b) - F(a)$

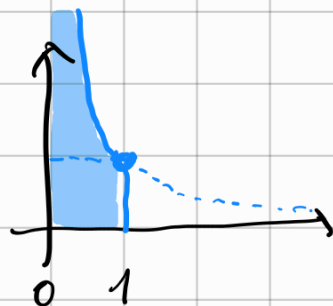
Se F è una primitiva F è derivabile dunque è continua, dunque se a, b stanno nel dominio di F il limite di F per $\alpha \rightarrow a$ è uguale a $F(a)$.

Quindi: $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^{+\infty} = -\frac{1}{+\infty} - \left(-\frac{1}{1} \right) = 0 + 1 = 1.$

Esempio 2

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx$$

DIVERGE



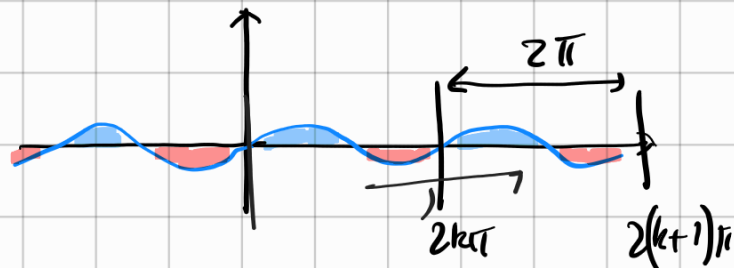
Infatti: $\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_0^1 = -\frac{1}{1} - \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{1}{x} \right)$

$$= -1 + +\infty = +\infty$$

Esempio 3

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x \, dx$$

NON ESISTE



Nota

$$\int_a^{a+2\pi} \sin x \, dx = 0$$

(ma)

$$\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \sin x \, dx = \int_0^{\pi} \sin x \, dx = 2$$



$$\int_{(2k+1)\pi}^{(2k+2)\pi} \sin x \, dx = \int_{\pi}^{2\pi} \sin x \, dx = -2$$



$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x \, dx = \left[-\cos x \right]_{-\infty}^{+\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-\cos x) - \lim_{x \rightarrow -\infty} (-\cos x)$$

NON ESISTE

NON ESISTE

NON ESISTE

MA ① $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R \sin x \, dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} 0 = 0$

cioè ② $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x \, dx$ è definito diversamente.

[① può essere utile, si può dire PV- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)$]

la scelta della definizione ci garantisce di poter usare i metodi di integrazione già usati per l'integrale proprio.

Es

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R \sin(x) dx$$

$\left[\begin{array}{l} x = t+1 \\ dx = dt \end{array} \right]$

$$\stackrel{?}{=} \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R \sin(t+1) dt$$

FALSO

$$= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R+1}^{R+1} \sin x dx$$

$$= \lim_{R \rightarrow +\infty} [-\cos x]_{-R+1}^{R+1} = \lim_{R \rightarrow +\infty} [\cos(-R+1) - \cos(R+1)]$$

$$= \lim_{R \rightarrow +\infty} [\cos(R-1) - \cos(R+1)]$$

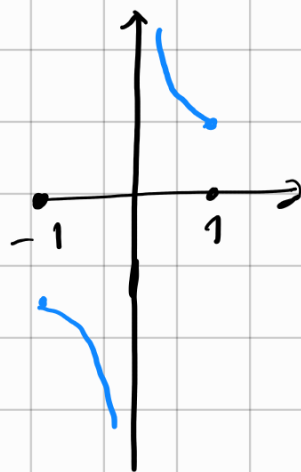
NON ESISTE!

Fimora $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$.

Cosa faccio se $f: (a, b) \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \rightarrow \mathbb{R}$?

Esempio

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx$$



$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$$

Non rientra nella definizione precedente.

Se anche fosse $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} \quad f: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$

non è localmente $\mathbb{R}$ -integrabile perché non è

limitata su $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

Allora definisco: $\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{x} dx + \int_0^1 \frac{1}{x} dx$

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{x} dx + \int_0^1 \frac{1}{x} dx$$

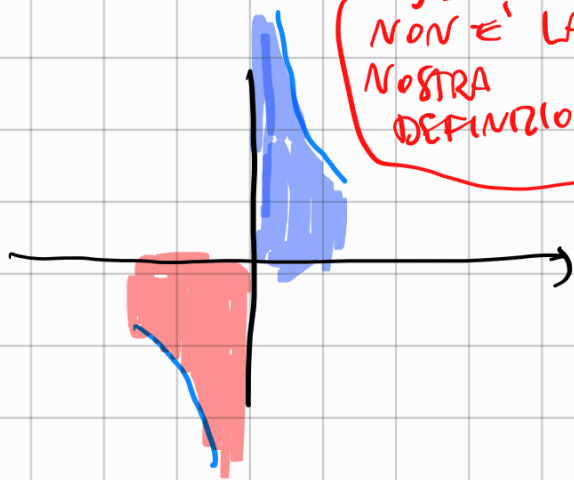
$$= \left[\ln|x| \right]_{-1}^0 + \left[\ln|x| \right]_0^1$$

$$= \left(\lim_{x \rightarrow 0^-} \ln|x| - 0 \right) + \left(0 - \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln|x| \right)$$
$$= +\infty + (-\infty) \quad \text{NON ESISTE!}$$



$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx \stackrel{\text{No}}{=} \left[\ln|x| \right]_{-1}^1 = \ln|1| - \ln|-1| = 0 - 0 = 0$$

NON È LA
NOSTRA
DEFINIZIONE



MA

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-1}^{-\epsilon} \frac{1}{x} dx + \int_{\epsilon}^1 \frac{1}{x} dx \right] = 0$$

Σ

In generale se $f = (a, b) \setminus \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$

$$\int_a^b f \equiv \int_a^{c_1} f + \int_{c_1}^{c_2} f + \dots + \int_{c_n}^b f$$

per definizione