

ANALISI MATEMATICA B

LEZIONE 51 - 6.2.2026

Integrali IMPROPRI

Le regole di integrazione valide per gli integrali "PROPRI" continuano a valere per gli integrali "IMPROPRI" (vedi appunti)

Teo Se $f \geq 0$ e localmente $\mathbb{R}$ -integrabile (per esempio continua)

allora $\int_a^b f$ esiste (finito o infinito).

dim monotonia. $\square$

Teo (criteri di confronto) $f, g \geq 0$

• $f \leq g \Rightarrow \int_a^b f \leq \int_a^b g$

a è l'unico punto critico

• $f \ll g$ (per $x \rightarrow a^+$) $f, g: (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

$$\int_a^b g < +\infty \Rightarrow \int_a^b f < +\infty$$

Esempio $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ $e^{-x^2} \ll \frac{1}{x^2}$ per $x \rightarrow +\infty$

oss $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} = +\infty$ perché $\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx = +\infty$

ma $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx < +\infty$

[$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ converge sse $p > 1$
 $\int_{x_0}^b \frac{1}{(x-x_0)^p} dx$ converge sse $p < 1$.]

$\int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx$ converge perché $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ converge.

$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \underbrace{\int_0^1 e^{-x^2} dx}_{\text{PROPRIO}} + \underbrace{\int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx}_{\text{IMPROPRIO MA FINITO}} \in \mathbb{R}$
 ↑
 NUMERO FINITO

• $f \sim g$ per $x \rightarrow a$

$\int_a^b f$ converge sse $\int_a^b g$ converge.

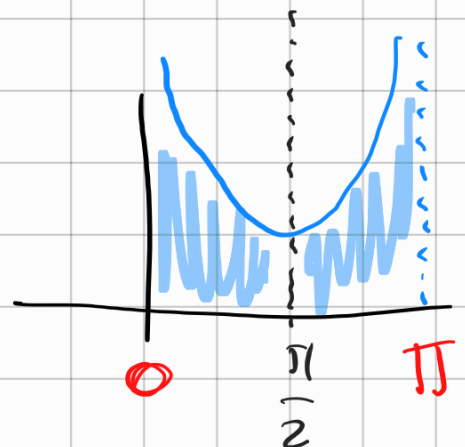
$f, g: (a, b]$
 ↑
 NON E' CATTIVO

NON E' CATTIVO

Esempio

$\int_0^\pi \frac{1}{\sin x} dx$

converge? N/O



$$\sin x \sim x \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sin x} dx \quad \text{converge sse} \quad \int_0^{\pi/2} \frac{1}{x} dx \quad \text{converge}$$

||
+∞ □

Ma quanto vale $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{\sin x} dx = ?$

Metodo ① sfruttando la simmetria $\sin(\pi - x) = \sin x$

$$\begin{cases} t = \pi - x \\ dt = -dx \end{cases} \quad x = \pi \leftrightarrow t = 0$$

$$\int_{x=\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{\sin x} dx = \int_{t=\frac{\pi}{2}}^0 \frac{1}{\sin(\pi - t)} (-1) dt$$

E' QUELLO DI PRIMA
↓

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sin(\pi - t)} dt = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sin t} dt = +\infty$$

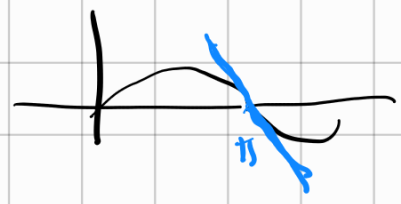
P. Taylor Teorema
errore nella tangente
↓

Metodo ②

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{\sin x} dx$$

$\sin x \sim \pi - x \quad \text{per } x \rightarrow \pi$

$\frac{1}{\sin x} \sim \frac{1}{\pi - x}$



$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{\sin x} dx \quad \text{converge sse} \quad \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{\pi - x} dx \quad \text{converge}$$

$$\text{ma} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{\pi-x} dx = +\infty$$

$$\left[\int_{x_0}^b \frac{1}{x-x_0} dx = \left[\ln |x-x_0| \right]_{x_0}^b = +\infty \right]$$

Esercizio $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2-1)\ln^2 x} dx$ converge?

① Quali sono i punti **CATTIVI**?

$+\infty$ è sempre cattivo!

0 sì e no. bocciamo di NO perché

$$\frac{1}{(x^2-1)\ln^2 x} \rightarrow 0 \text{ per } x \rightarrow 0^+$$

quindi la funzione si estende in continuità (senza influire sull'integrale) e diventa continua e esistente.

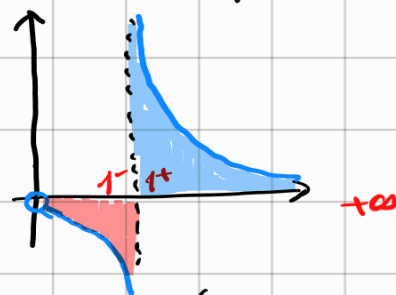
1 perché il denominatore si annulla, dunque la f integranda tende a $\pm\infty$.

~~non~~ sta in $[0, +\infty]$

Mi chiedo se f è positiva.

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

se $x \in (0, 1)$ $f(x) < 0$ (MA) $-f(x) > 0$.



SPEZZO l'integrale

$$\int_0^{+\infty} f = \int_0^1 f + \int_1^{+\infty} f$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 $-f \geq 0$ $f \geq 0$

Concentriamoci sui punti critici

• $+\infty$ $f(x) = \frac{1}{(x^2-1) \ln^2 x} \ll \frac{1}{x^2}$

$x^2-1 \sim x^2$ per $x \rightarrow +\infty$
 $\ln^2 x \rightarrow +\infty$

$\int_{1000}^{+\infty} \frac{1}{x^2}$ converge $\Rightarrow \int_{1000}^{+\infty} f$ converge ok!

$\uparrow$ qualunque numero > 1 .

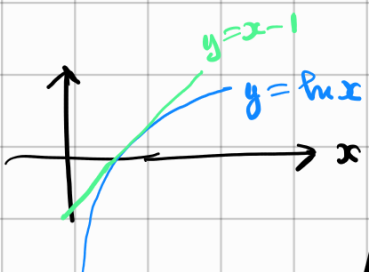
$$\left[\int_1^{+\infty} f = \int_1^{1000} f + \int_{1000}^{+\infty} f \right]$$

• $1^+ (o 1^-)$

$f(x) = \frac{1}{(x^2-1) \ln^2 x} \sim \frac{1}{2(x-1) \cdot (x-1)^2}$
 $= \frac{1}{2} \frac{1}{(x-1)^3}$

$x^2-1 = (x+1)(x-1) \sim 2(x-1)$ per $x \rightarrow 1$

$\ln(1+t) = t + o(t) \sim t$ per $t \rightarrow 0$
 $\downarrow$
 $\ln x \sim x-1$



(MA)

$\int_1^{1000} \frac{1}{(x-1)^3} dx = +\infty$

e anche

$\int_0^1 \frac{1}{(x-1)^3} dx = -\infty$

$\nearrow$
 NEGATIVO

perché $3 > 1$.

$\left[x \rightarrow x_0 \right]$

$f(x) = g(x) + o(g(x))$
 $= g(x) \cdot (1 + o(1))$
 $\frac{f(x)}{g(x)} = 1 + o(1) \rightarrow 1$
 $f \sim g$

$$\int_0^{+\infty} f = \int_0^1 + \int_1^{1000} + \int_{1000}^{+\infty}$$

$$= (-\infty) + (+\infty) + \text{FINITO}$$

= NON ESISTE! (INDETERMINATO)

Esempio $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx = 0$

$$\int_{-1}^1 = \int_{-1}^0 + \int_0^1$$

CONVERGENZA ASSOLUTA

$$\left(\int_0^1 \frac{1}{x} = \ln x \right)_0^1 = +\infty$$

$$\int_1^1 \frac{1}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} \Big|_1^1 = 2$$

diremo che $\int_a^b f$ converge assolutamente

se $\int_a^b |f|$ converge.

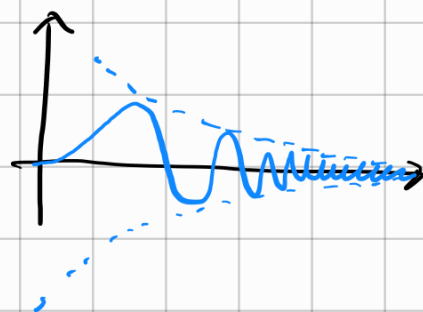
Teo Se $f: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ è localmente R-integrabile

Allora anche $|f|$ è localmente R-integrabile

e se $\int_a^b |f|$ converge allora $\int_a^b f$ converge.

(CONVERGENZA ASSOLUTA $\Rightarrow$ CONVERGENZA)

Esempio $\int_0^{+\infty} \sin(x^2) e^{-x} dx$



CATIVO IN $+\infty$.

MA $|\sin(x^2)e^{-x}| \leq e^{-x}$ CONFRONTO PUNTUALE

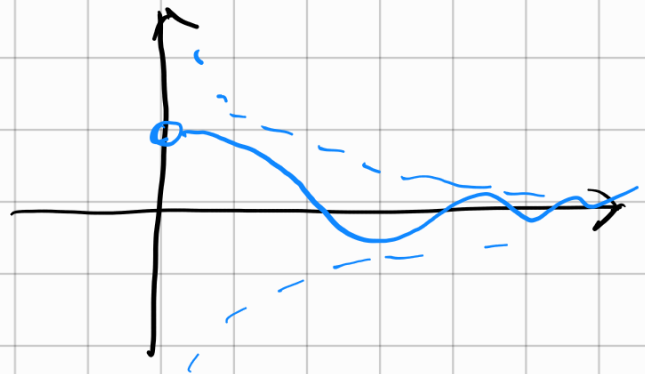
$$\int_0^{+\infty} e^{-x} dx < +\infty \Rightarrow \int_0^{+\infty} |\sin(x^2)e^{-x}| dx < +\infty$$

TEO CONVERGENZA ASSOLUTA.

$$\int_0^{+\infty} \sin(x^2)e^{-x} dx \text{ converge assolutamente}$$

Esempio $\int_a^b f$ converge ma non assolutamente

$$\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$



(analogo di $\sum \frac{(-1)^k}{k}$)

$$\left| \frac{\sin x}{x} \right| \leq \frac{1}{x}$$

MA $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{1}{x} = +\infty$

($\square$ dimostro che $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} = +\infty$)

MA $\int \frac{\sin x}{x} dx$

converge

$\square \int \frac{\sin x}{x}$ $\rightarrow$ $\int \frac{\cos x}{x^2}$ CONVERGE

