

9 feb 2026 - lezione n° 52

$$\int_1^{+\infty} f(x) dx$$

||

$$\int_1^{+\infty} |f(x)| dx$$

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_1^m f(x) dx$$

ASSOLUTA CONVERGENZA $\Rightarrow$ CONVERGENZA



$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

convergente ma non assolutamente convergente

$$\int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx = +\infty$$

Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua & T -periodica

Quando $\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx$ convergente?

$$\begin{cases} f(x) = \sin x \\ f(x) = |\sin x| \end{cases}$$

na media nulla

non ha media nulla

R: L' integrale è convergente $\Leftrightarrow f$ è a media nulla

$$H(x) \doteq \int_x^{x+T} f(t) dt = \int_1^{x+T} f(t) dt - \int_1^x f(t) dt$$

$$H'(x) = f(x+T) - f(x) = 0$$

$$\Rightarrow H(x) = \int_x^{x+T} f(t) dt = \int_0^T f(t) dt$$

è costante ↗

$$\left. \begin{aligned} m &\doteq \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \\ f_0(x) &\doteq f(x) - m \end{aligned} \right\} \Rightarrow \int_0^T f_0(t) dt = 0$$

media di f
sul periodo $[0, T]$

$$F_0(x) \doteq \int_0^x f_0(t) dt$$

$$F_0(x+T) - F_0(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

cioè F_0 è una funzione T -periodica
(e quindi limitata)

$$\int_1^A \frac{f(t)}{t} dt = \int_1^A \left[\frac{F_0(t)}{t} + m \right] dt + \int_1^A (F_0 + mt) \left(+ \frac{1}{t^2} \right) dt$$

↑
integraz. per parti

$$f(t) = f_0(t) + m \quad \begin{array}{l} \text{integraz.} \rightarrow F_0(t) + mt \\ \text{derivata} \rightarrow -\frac{1}{t^2} \end{array}$$

$\frac{1}{t}$

$$= \underbrace{\frac{F_0(A)}{A} - \frac{F_0(1)}{1}}_{\substack{\downarrow A \rightarrow +\infty \\ 0}} + \underbrace{\int_1^A \frac{F_0(t)}{t^2} dt}_{\substack{\downarrow \text{assolut.} \\ \text{convergente}}} + m \underbrace{\int_1^A \frac{1}{t} dt}_{\downarrow m \log A}$$

Se $m \neq 0$ l'integrale diverge
 $q \begin{cases} +\infty & \text{se } m > 0 \\ -\infty & \text{se } m < 0 \end{cases}$

Se $m = 0$ l'integrale è convergente

(*)
$$\int_1^A \left| \frac{F_0(t)}{t^2} \right| dt \leq \int_1^A \frac{M}{t^2} dt = \left[-\frac{M}{t} \right]_1^A \dots$$

$$M \doteq \sup_{t \in \mathbb{R}} |F_0(t)|$$

$$\sum a_n \text{ converge} \implies a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

non ha un analogo nel caso degli integrali

Può capitare che $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ converga ma $f(t)$ non infinitesima per $t \rightarrow +\infty$

$$\int_0^{+\infty} \sin(t^2) dt \text{ è convergente}$$

$$t^2 = x \quad t = \sqrt{x} \quad dt = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$$

$$\int_0^A \sin(t^2) dt \quad \checkmark \quad \int_0^{\sqrt{A}} \frac{\sin x}{2\sqrt{x}} dx$$

$$\frac{\sin x}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} \frac{\sin x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx = M$$

$$\int_1^{\sqrt{A}} \frac{\sin x}{2\sqrt{x}} dx = \left[-\frac{\cos x}{2\sqrt{x}} \right]_1^A + \int_1^{\sqrt{A}} \cos x \left(-\frac{1}{4} x^{-3/2} \right) dx$$

$$\downarrow A \rightarrow +\infty$$

$$\frac{\cos(1)}{2}$$

$\downarrow A \rightarrow +\infty$
converge

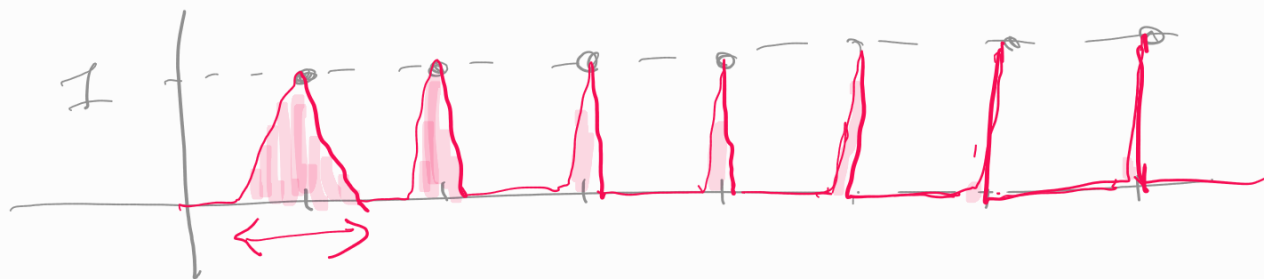
$$\int_1^{\sqrt{A}} \frac{\cos x}{x^{3/2}} dx \text{ è assolutamente convergente}$$

$$\int_1^{\sqrt{A}} \left| \frac{\cos x}{x^{3/2}} \right| dx \leq \int_1^{\sqrt{A}} \frac{1}{x^{3/2}} dx$$

Oss: Se f ammette limite $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$
e $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ converge

Q: Se $f \geq 0$ ~~f continua~~ può succedere che
 $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ converge ma f non infinitesima?

Sugg:



$$\int_0^1 \frac{\log x}{1-x} dx$$

È convergente?

È possibile calcolarlo?

$1-x \geq 0$ si annulla per $x=1$

$\log x < 0$ per $x \in (0,1)$ e non è def in 0

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log x = -\infty$$

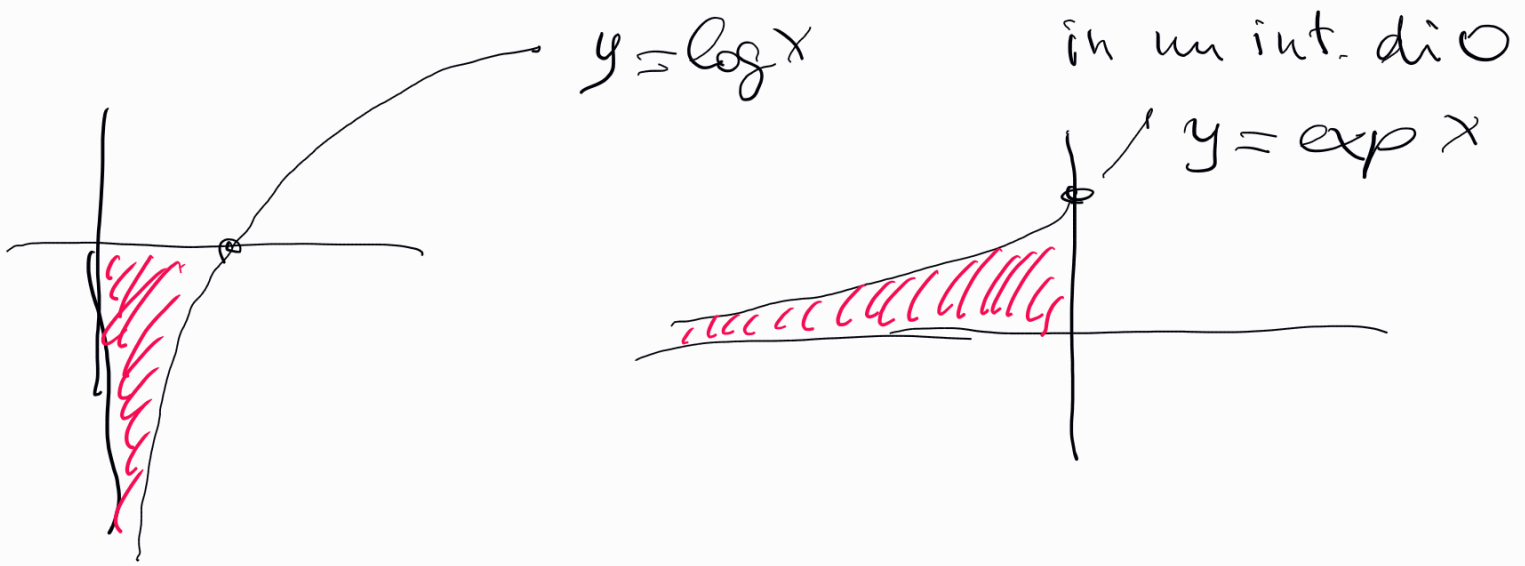
in $x=1$ non c'è problema perché

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log x}{1-x} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\log(1-t)}{t} = -1$$

$t = 1-x$

$$\left| \frac{\log x}{1-x} \right| \sim |\log x| \text{ per } x \rightarrow 0$$

↖ è integrabile



$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k$$

Questo passaggio
verrà giustificato
più avanti

$$\int_0^1 \frac{\log x}{1-x} dx = \int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty} x^k \log x dx$$



$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^1 x^k \log x dx$$

$$\int_0^1 x^k \log x dx = \left[\frac{x^{k+1}}{k+1} \log x \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{k+1}}{k+1} \cdot \frac{1}{x} dx$$

$\downarrow$
 0

$$= - \frac{1}{(k+1)^2}$$

$$\int_0^1 \frac{\log x}{1-x} dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^2} \left(= \frac{\pi^2}{6} \right)$$

Il passaggio  non è scontato
sottintende che sia lecito scambiare le operazioni di limite e integrale

$$\int_0^1 \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 S_n(x) dx$$

Nel caso in questione questo passaggio è lecito,
ma in generale può essere problematico

CONTROESEMPIO

$$f_n(x) = \frac{n^2 x}{1 + n^4 x^4}$$

$$x \in [0, 1]$$

$x \in [0, 1]$ fissato

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$$

$$\int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx$$

$$\int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \frac{n x}{1 + n^4 x^4} \overset{(ndx)}{=} \overset{y=nx}{=} \frac{1}{2} \int_0^n \frac{2y}{1+y^4} dy$$

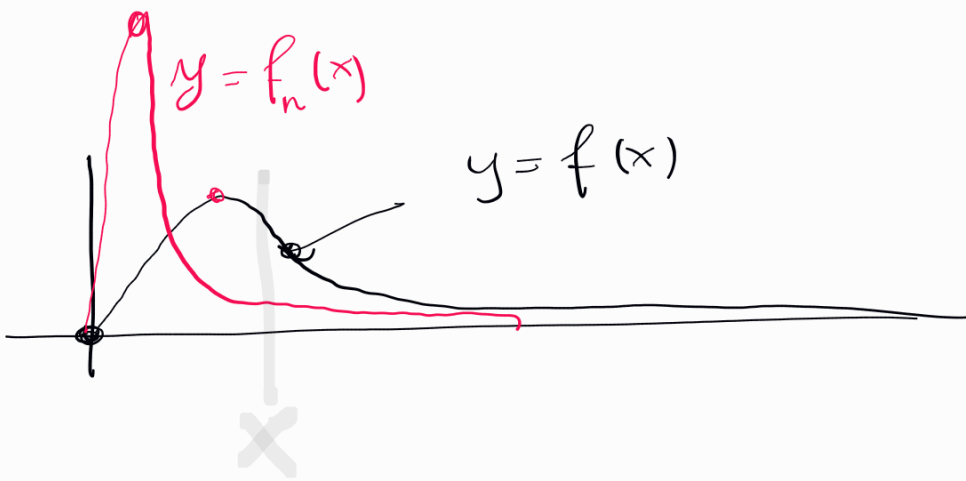
$$(\arctan y^2)' = \frac{1}{1+y^4} (2y)$$

$$= \left[\frac{1}{2} \arctan y^2 \right]_0^n = \frac{1}{2} \arctan n^2$$

$n \rightarrow +\infty$

$$\frac{\pi}{4}$$

$$f_n = \frac{n^2 x}{1+n^4 x^4} = n f(nx) \quad f(x) \doteq \frac{x}{1+x^4}$$



DEF: A insieme; $f_n: A \rightarrow \mathbb{R}$
 $n \in \mathbb{N}$

$$f: A \rightarrow \mathbb{R}$$

Dico che $f_n \rightarrow f$ uniformemente su A

se

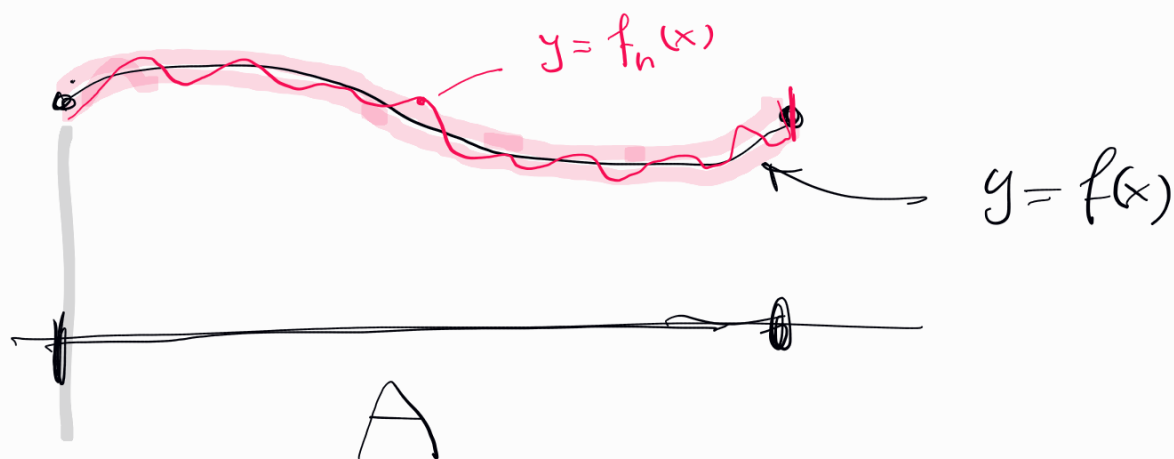
non dipende da x

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \boxed{\forall x \in A} \quad \forall n \geq \bar{n}$$

Da confrontare con la seguente

può dipendere da x

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \boxed{\forall x \in A} \quad \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall n \geq \bar{n}$$



Es: Mostrare che se $f_n \rightarrow f$ uniformemente su $[a, b]$ allora

$$\int_a^b f_n dx \rightarrow \int_a^b f(x) dx$$

Es: Dire se $S_n = \sum_{k=0}^n x^k \log x$

converge uniformemente a $\frac{\log x}{1-x}$

su $[0,1]$

Es: Dire se $f_n(x) = \sqrt{x^2 + 1/n}$

converge uniformemente su $\mathbb{R}$
