

12 feb 2026 - Lez 53

RECAP: Convergenza UNIFORME

$$f, f_n: A \rightarrow \mathbb{R}$$

notaz

✓

$$f_n \rightarrow f \text{ uniformemente su } A \quad \left(f_n \xrightarrow{\text{unif}} f \text{ su } A \right)$$

def $\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in A \quad \forall n \geq \bar{n}$

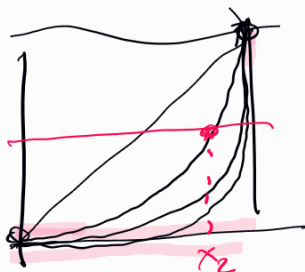
$$\sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

//

$$\|f_n - f\|_{\infty, A}$$

Esempio: $f_n(x) = x^n \quad x \in [0, 1]$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 1 \\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$



La conv
non è uniforme (*)

Se $\varepsilon < \frac{1}{2}$ $\forall n \quad \exists x_n \in (0, 1) : f_n(x_n) = \frac{1}{2} \quad |f_n(x_n) - f(x_n)| > \varepsilon$

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & x=0 \\ x^n \log x & x \in (0,1] \end{cases}$$

f_n converge uniformemente?

$$f_n(x) \rightarrow 0 \quad \forall x \in [0,1]$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} x \log x \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

$$f_n(x) = \frac{1}{n} x^n \log x^n$$

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f_n(x)| = \sup_{x \in [0,1]} \frac{1}{n} |\varphi(x^n)|$$

$$= \sup_{t \in [0,1]} \frac{1}{n} |\varphi(t)| = \frac{1}{n} \|\varphi\|_\infty$$

$\downarrow n \rightarrow \infty$
0

Esercizio: $x^n \frac{\log x}{1-x}$

converge uniformemente su $[0,1]$?

Esempio: $\forall [a,b]$ con $(a,b \in \mathbb{R})$

$$\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \Rightarrow e^x \quad \text{su } [a,b]$$

Ma la convergenza non è uniforme su $\mathbb{R}$

$$\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \not\rightarrow e^x \text{ su } \mathbb{R}$$

Esercizio Se $F(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ ha raggio di convergenza R

allora $\forall r < R \quad \sum_{k=0}^n a_k x^k \Rightarrow F(x) \text{ su } [-r, r]$

PASSAGGIO AL LIMITE SOTTO SEGNO DI INTEGRALE

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) dt \right)$$

Quali ipotesi;
garantiscono questa identità?

PROP: se $f, f_n \in \mathcal{R}([a, b])$ e $f_n \Rightarrow f$ su $[a, b]$

allora $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b f(t) dt \quad (*)$

$f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t)$

Dim: $(*) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_a^b (f_n(t) - f(t)) dt \right| = 0$

$$0 \leq \left| \int_a^b (f_n(t) - f(t)) dt \right| \leq \int_a^b |f_n(t) - f(t)| dt \leq (b-a) \|f_n - f\|_{\infty [a, b]}$$

$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

TEOR: CONV. DOMINATA

LOC. UNIFORME

in debole mento

$$-\infty < a < b < +\infty$$

$$f_n : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f, g, f_n \in \mathcal{R}([\alpha, \beta]) \quad \forall [\alpha, \beta] \subset (a, b)$$

(*) $f_n \Rightarrow f$ su $[\alpha, \beta] \quad \forall [\alpha, \beta] \subset (a, b)$

$$0 \leq |f_n(t)| \leq g(t) \quad \forall t \in (a, b) \quad \forall n \quad (\Rightarrow |f(t)| \leq g(t))$$

$$\int_a^b g(t) dt < +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b f(t) dt \quad (\star)$$

ASS. CV ASS. CV

OSS: (*) $\Rightarrow \forall t \in (a, b) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = f(t)$

OSS₂: $\int_a^b f_n(t) dt$ è assolut. conv. e $|f(t)| \leq g(t) \Rightarrow \int_a^b f(t) dt$ è ASS. CV

Dim: Come prima per mostrare (*)

Mostrare che $\int_a^b |f_n(t) - f(t)| dt \rightarrow 0 \quad n \rightarrow +\infty$

$\forall \varepsilon > 0$ fissato posso prendere $\alpha < \beta$
in modo che

$$\int_a^\alpha g(t) dt < \frac{\varepsilon}{5} \quad \& \quad \int_\beta^b g(t) dt < \frac{\varepsilon}{5}$$



$$0 \leq \int_a^b |f_n(t) - f(t)| dt = \int_a^\alpha |f_n - f| dt + \int_\alpha^\beta |f_n - f| dt + \int_\beta^b |f_n - f| dt$$

$$\leq \int_a^\alpha \underbrace{|f_n| + |f|}_{\leq 2g} dt + \int_\alpha^\beta |f_n - f| dt + \int_\beta^b \underbrace{|f_n| + |f|}_{\leq 2g} dt$$

$$\leq \frac{2}{5} \varepsilon + \int_\alpha^\beta |f_n - f| dt + \frac{2}{5} \varepsilon$$

$\bar{n}$ f. c.

$$\|f_n - f\|_{\infty, [\alpha, \beta]} < \frac{\varepsilon}{5(\beta - \alpha)} \quad \forall n \geq \bar{n}$$

$$< \frac{2}{5} \varepsilon + \frac{\varepsilon}{5(\beta - \alpha)} \cdot (\cancel{\beta - \alpha}) + \frac{2}{5} \varepsilon = \varepsilon$$

Esercizio: Verificare che

$$\sum_{k=0}^n x^k \log x \implies \frac{\log x}{1-x} \quad \text{su } [0, r] \\ \forall r < 1$$

e la convergenza è dominata da una funzione g positiva

$$(g(x) = \frac{|\log x|}{1-x})$$

$$\int_0^1 g(t) dt < +\infty$$

TEOR [Dip. CONTINUA DA UN PARAMETRO]

$I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo

$$-\infty \leq a < b \leq +\infty$$

$$f: \overset{x}{I} \times \overset{t}{(a, b)} \longrightarrow \mathbb{R}$$

continua

$$g: (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

$$0 \leq |f(x, t)| < g(t) \quad \forall (x, t) \in I \times (a, b)$$

$$\int_a^b g(t) dt < +\infty$$

Allora $x \mapsto \int_a^b f(x, t) dt$ è continua

Esempio: $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} \underbrace{t^{x-1}}_{f(x,t)} e^{-t} dt$

Classico

$\forall x > 0$ l'integrale è convergente

Funzione
Gamma
di Eulero

Se $x \in [\frac{1}{n}, n]$

$$|f(x,t)| \leq g(t) = \begin{cases} t^{\frac{1}{n}-1} & t \in (0,1) \\ t^{n-1} e^{-t} & t \geq 1 \end{cases}$$

$$\int_0^{\infty} g(t) dt < +\infty$$

è ben definita

Se $x \in [\frac{1}{n}, n] \Rightarrow \Gamma(x)$

Inoltre, per il th. appena enunciato, $\forall n \in \mathbb{N}$

$\Gamma|_{[\frac{1}{n}, n]}$

è continua

Restrizione di Γ
all'intervallo $[\frac{1}{n}, n]$

Esercizio:
X CASA

mostro che (i) $\Gamma(1) = 1$

(i) $\Gamma(x+1) = x \Gamma(x) \quad \forall x > 0$

(ii) $\Gamma(n) = (n-1)! \quad \forall n \geq 1$

DIM :
TEOREMA

$$x \mapsto \int_a^b f(x, t) dt \quad \text{è continua}$$

Per mostrare questo basta mostrare
 $(x_k, x \in I)$
che: se $x_k \rightarrow x$ per $k \rightarrow +\infty$

allora $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b f(x_k, t) dt = \int_a^b f(x, t) dt$ $\textcircled{*}$

SPG: posso supporre I int. chiuso
e limitato

(basta prendere il più piccolo int.
chiuso che contiene x & x_k)

$$\textcircled{*} \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_a^b |f(x_k, t) - f(x, t)| dt = 0$$

$\forall \varepsilon > 0$ scelgo $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$
in modo che

$$\int_a^\alpha g(t) dt < \frac{\varepsilon}{5} \quad \& \quad \int_\beta^b g(t) dt < \frac{\varepsilon}{5}$$

$$\int_a^b |f(x_k, t) - f(x, t)| dt \leq \int_a^\alpha |f(x_k, t) - f(x, t)| dt + \int_\alpha^\beta |f(x_k, t) - f(x, t)| dt + \int_\beta^b |f(x_k, t) - f(x, t)| dt$$

$$< \frac{2\varepsilon}{5} + \int_\alpha^\beta |f(x_k, t) - f(x, t)| dt + \frac{2\varepsilon}{5}$$

Si conclude osservando che

$$\textcircled{a} \quad f(x_k, \cdot) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} f(x, \cdot) \quad \text{su } [\alpha, \beta]$$

e quindi $\exists \bar{k}$ t.c. $\|f(x_k, \cdot) - f(x, \cdot)\|_{\infty, [\alpha, \beta]} < \frac{\varepsilon}{5(\beta - \alpha)} \quad \forall k \geq \bar{k}$
 e possiamo concludere come nel teorema precedente

a Vale perché

f continua su $I \times [\alpha, \beta] \xRightarrow{\text{Heine Cantor}} f$ UNIFORMEMENTE CONTINUA SU $I \times [\alpha, \beta]$
 cioè

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ tale che

se $d((x, t), (x', t')) < \delta \Rightarrow \sqrt{(x - x')^2 + (t - t')^2}$

$|f(x, t) - f(x', t')| < \varepsilon$ per ogni $(x, t) \in I \times [\alpha, \beta]$
 $(x', t') \in I \times [\alpha, \beta]$

fissato $\varepsilon > 0$ scelgo $\bar{k}$ tale che

se $k \geq \bar{k}$ $|x_k - x| < \delta$; dato che

$$d((x_k, t), (x, t)) = |x - x_k| < \delta$$

$\uparrow$
 $\forall k \geq \bar{k}$

$$\Rightarrow |f(x_k, t) - f(x, t)| < \varepsilon$$

TEOREMA

(Derivazione sotto segno
di integrale)

$f: I \times (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ continua

$\forall t \in (a, b) \quad x \mapsto f(x, t)$ è derivabile

& $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ è continua
su $I \times (a, b)$

$$0 \leq \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq G(t)$$

con $\int_a^b G(t) dt < +\infty$

$$\Rightarrow x \mapsto \int_a^b f(x, t) dt$$

è derivabile

$$\frac{d}{dx} \left(\int_a^b f(x, t) dt \right) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$$

Questo enunciato verrà dimostrato

la prossima volta

Esempio: $+\infty$

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} \underbrace{t^{x-1}}_{f(x,t)} e^{-t} dt$$

$$f(x, t) = e^{(x-1) \log t} \cdot e^{-t}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = \log t \cdot e^{(x-1) \log t} e^{-t}$$

$$= \log t \cdot t^{x-1} e^{-t}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \log^2 t \quad t^{x-1} e^{-t}$$

Esercizio: verificare che le ipotesi del teorema valgono in questo caso

ES [⊗] mostrare che

$x \rightarrow \log \Gamma(x)$ è convessa

$$(\log \Gamma(x))' = \frac{\Gamma'}{\Gamma}$$

$$(\log \Gamma(x))'' = \frac{\Gamma'' \Gamma - (\Gamma')^2}{\Gamma^2}$$

[...]