

ANALISI MATEMATICA B

LEZIONE 56 - 18.2.2026

ricevimento oggi in aula S1 or 14³⁰.

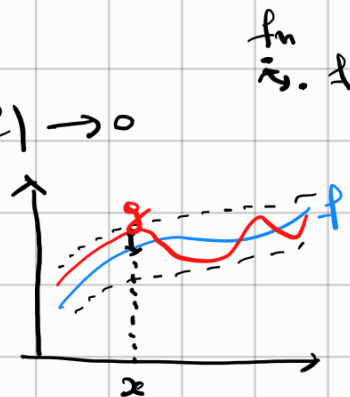
Convergenza uniforme:
(GIÀ VISTO)

$$f_n \Rightarrow f$$

$$d_\infty(f_n, f) \rightarrow 0$$

distanza
uniforme

$$d_\infty(f, g) = \sup_x |f(x) - g(x)|$$



Succ. di Cauchy: a_n è di Cauchy se $\forall \epsilon > 0 \exists N: k, j > N \implies d(a_k, a_j) < \epsilon$

(uno spazio metrico è)

Completo: se ogni successione di Cauchy converge.

ES $\mathbb{Q}$ non è completo: $a_n \in \mathbb{Q} \implies a_n \rightarrow \sqrt{2}$ in $\mathbb{R}$
 a_n è di Cauchy in $\mathbb{Q}$ ma, in $\mathbb{Q}$, non converge.

" $\mathbb{R}$ è il completamento di $\mathbb{Q}$ ", $\mathbb{R}$ invece è completo.

proprietà dell'ordinamento
 $\mathbb{R}$ è continuo (Dedekind-completo)



le successioni monotone hanno
limite $\lim = \sup$



Bolzano-Weierstraß



$\mathbb{R}$ è completo & proprietà della
distanza

a_n di Cauchy in $\mathbb{R}$
⇓ fatto generale

a_n è limitata

⇓ B-W vale in $\mathbb{R}$

ha una sotto-sequenza convergente

⇓ fatto generale

tutta a_n converge

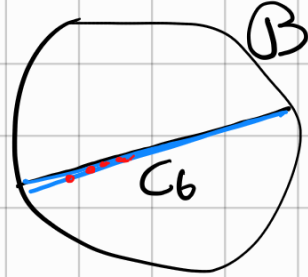
"CONTINUITÀ" = COMPLETEZZA

GLA' VISTO: lo spazio (B) delle funzioni limitate è completo per la distanza uniforme.

MANCA: lo spazio C_b delle funzioni continue e limitate è completo.

$$C_b = C \cap B$$

$\uparrow$ continua $\uparrow$ limitata



$$\left[\begin{array}{l}
 f_k \text{ di Cauchy in } C \cap B \Rightarrow f_k \text{ è di Cauchy in } B \\
 \Downarrow \\
 f_k \text{ converge in } C \cap B \quad \xleftarrow{\text{MANCA}} \quad ? \\
 \uparrow \\
 f \in C
 \end{array} \right.
 \begin{array}{l}
 \Downarrow \\
 f_k \text{ converge in } B \\
 f_k \Rightarrow f
 \end{array}$$

$C \cap B$ è completo

Teo Se f_k è una successione di funzioni continue e $f_k \Rightarrow f$ allora f è continua.

[C è un sottospazio chiuso di B]

$\uparrow$
 per passaggio al limite



dim $f_k : A \rightarrow \mathbb{R}$ $\left(\begin{array}{l} \text{in generale } A \text{ sp. metrico} \\ \text{ma facciamo } A \subseteq \mathbb{R} \end{array} \right)$
 $f : A \rightarrow \mathbb{R}$

Ipotesi: $d(f_k, f) \rightarrow 0$, f_k continue

Tesi: f è continua.

Fissato $x_0 \in A$ voglio mostrare che f è continua in x_0

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \underbrace{|f(x) - f_k(x)|}_{\leq \varepsilon} + \underbrace{|f_k(x) - f_k(x_0)|}_{\leq \varepsilon} + \underbrace{|f_k(x_0) - f(x_0)|}_{\leq \varepsilon}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists k : d(f_k, f) \leq \varepsilon$$

$$\Downarrow$$
$$\boxed{|f_k(x) - f(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in A}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow$$

(continuità di f_k)

$$\boxed{|f_k(x) - f_k(x_0)| < \varepsilon}$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 (\exists k) \exists \delta > 0 : \text{se } |x - x_0| < \delta$$

$$\text{allora } |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon$$

$$\Rightarrow f \text{ è continua.}$$

□



Esercizio [funzione di Weierstraß]

Esiste una funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua ma non
derivabile in nessun punto.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a^k \cdot \cos(b^k \pi x) \quad a = \frac{1}{8}, \quad b = 512.$$

① Se $|a| < 1$ la serie converge
perché converge assolutamente: $|a^k \cos(-)| \leq |a|^k$

$$\sum |f_k(x)| \quad \uparrow \quad \sum_{k=0}^{+\infty} |a|^k \text{ converge } (\Leftrightarrow) |a| < 1$$

② ANZI la serie converge TOTALMENTE

$$f_k(x) = a^k \cos(b^k \pi x)$$

cioè $\sum \|f_k\|_{\infty}$ converge

dove: $\|g\|_{\infty} = \sup_x |g(x)|$

ma $\|f_k\|_{\infty} = |a|^k$ e $\sum |a|^k$ converge $(\Leftrightarrow) |a| < 1$

$\Rightarrow \sum f_k$ converge UNIFORMEMENTE

Dunque se f_k sono tutte continue

Dunque $\sum_{k=0}^N f_k$ sono continue

ma

$$\sum_{k=0}^N f_k \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} f_k = f$$

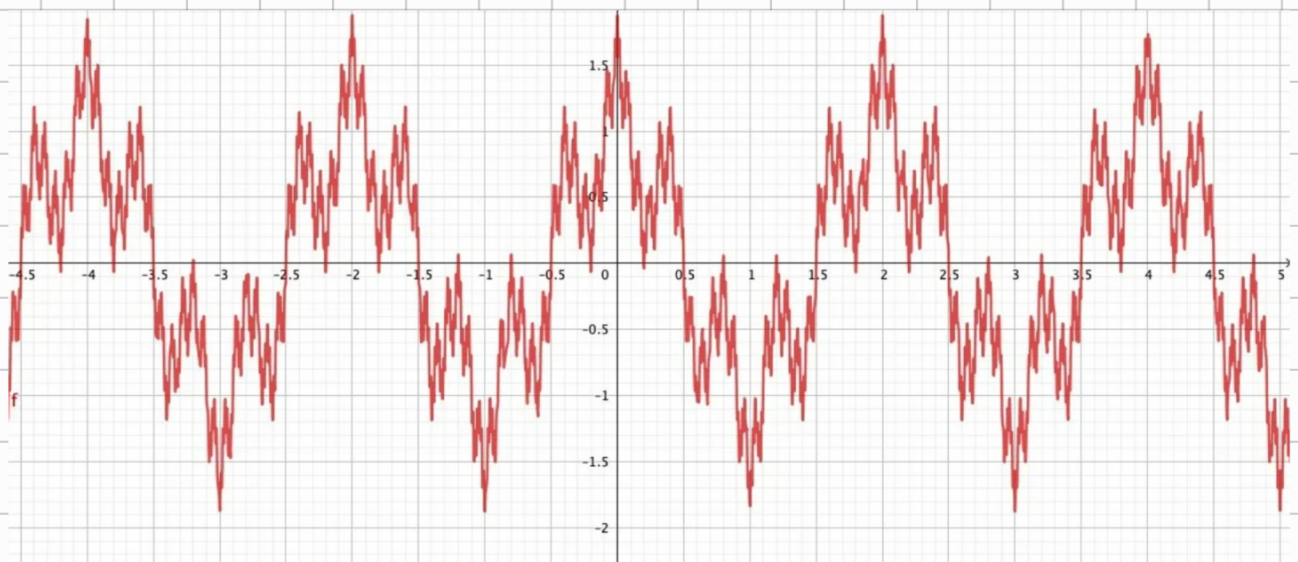
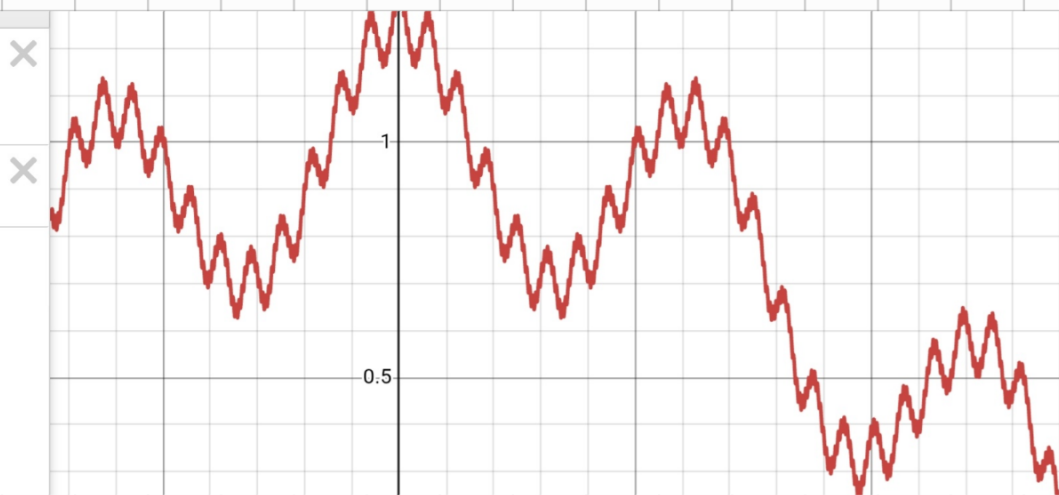
dunque f è continua.

③ f non è derivabile in nessun punto

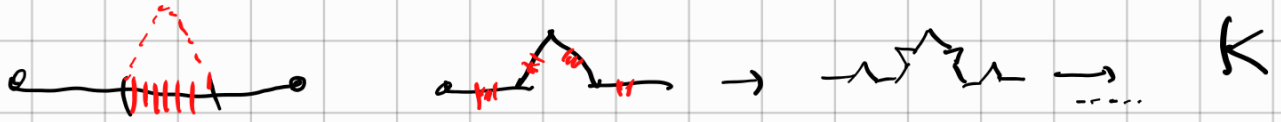
NON LO FACCIAMO: vedi appunti

IDEA: il modulo della derivata di $\sum_{k=0}^N f_k$
tende a ∞ per $N \rightarrow \infty$.

$$\cos(x) + \frac{\cos(10x)}{4} + \frac{\cos(100x)}{16}$$



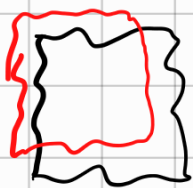
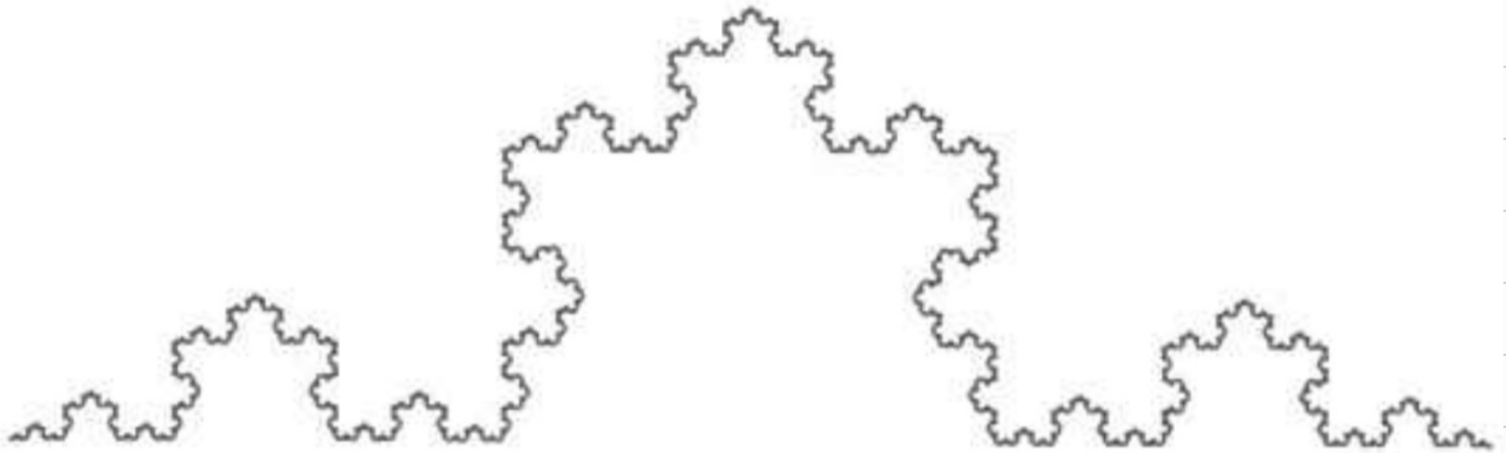
ALTRA ESEMPIO: Curve di Koch (Fiocco di neve)



K = unione di 4 copie riscalate di K .

equazione con incognita una figura geometrica.

idea: si definisce una "distanza uniforme" tra figure geometriche



$K \xrightarrow{f} 4 \text{ copie riscalate di } K$
 $\text{di } \frac{1}{3}$
 $\text{è } \frac{1}{3}\text{-lipsch.}$
 f è una CONTRAZIONE

Teo (Banach-Caccioppoli / contrazione)

Se X è spazio metrico completo

e $f: X \rightarrow X$ è una CONTRAZIONE

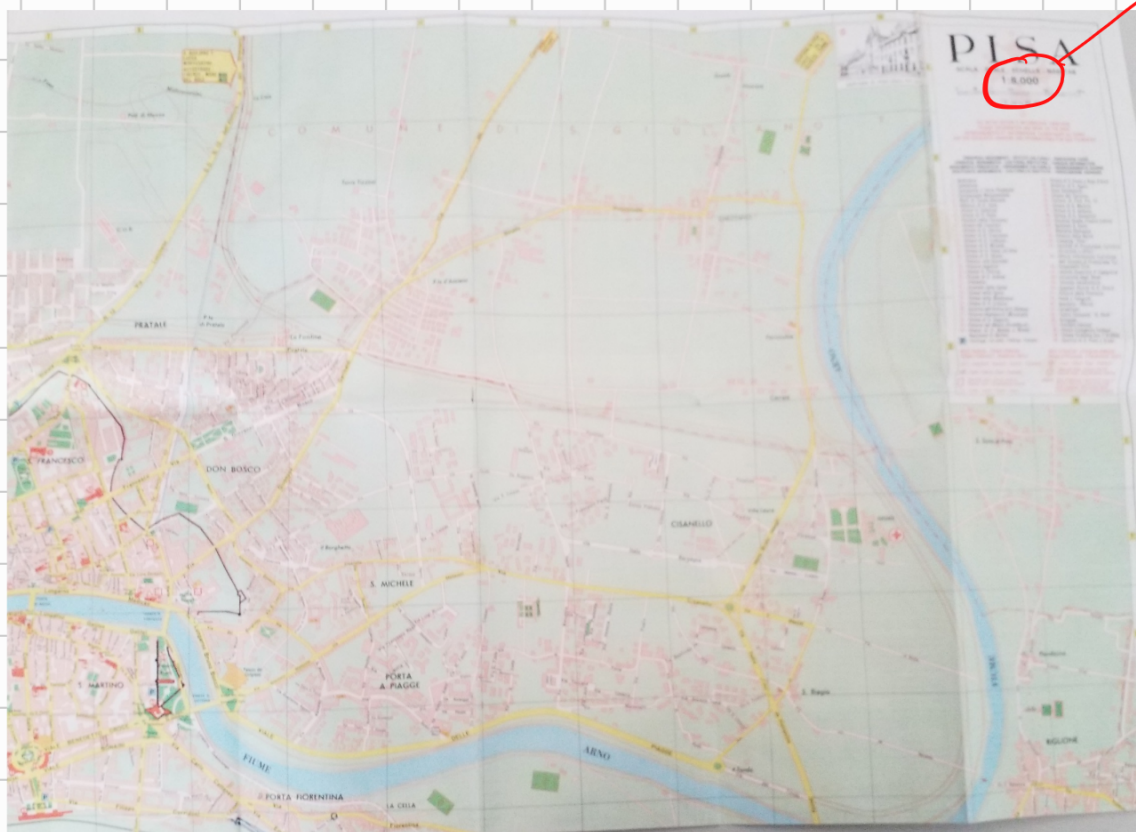
allora $\exists! x \in X$ t.c. $f(x) = x$

↑
punto fisso

def $f: X \rightarrow Y$ è L -lipschitziana se $L \in \mathbb{R}$

$$d(f(x_1), f(x_2)) \leq L d(x_1, x_2)$$

Se $L < 1$ diremo che f è una contrazione.



L
costante
di Lipschitz

