

Thm. (Banach - Caccioppoli o delle contrazioni)

Sia X uno spazio metrico completo non vuoto e sia $f: X \rightarrow X$ una funzione L -lip. relittiziana con $L < 1$ (cioè f è una contrazione).

Allora $\exists! \bar{x} \in X$ t.c. $f(\bar{x}) = \bar{x}$.

Dim. Sia $x_0 \in X$ qualunque. Definiamo la successione ricorsiva

$$\begin{cases} x_{m+1} = f(x_m) \\ x_0 = x_0 \end{cases}$$

Sappiamo che se converge converge a un punto fisso.

Chiamiamo $d(x_0, x_1) = D$; dato che f è L -lip. relittiziana, si ha

$$d(x_0, x_1) = D$$

$$d(x_1, x_2) = d(f(x_0), f(x_1)) \leq L \cdot d(x_0, x_1) = L \cdot D$$

$$d(x_2, x_3) = d(f(x_1), f(x_2)) \leq L \cdot d(x_1, x_2) = L^2 \cdot D$$

$\vdots$ Induzione

$$d(x_m, x_{m+1}) \leq L \cdot d(x_{m-1}, x_m) \leq \dots \leq L^m D$$

Mostriamo che la successione è di Cauchy:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall m, j \geq N, d(x_m, x_{m+j}) < \varepsilon$$

$$d(x_m, x_{m+j}) \leq d(x_m, x_{m+1}) + \dots + d(x_{m+j-1}, x_{m+j})$$

$$\leq L^m D + L^{m+1} D + \dots + L^{m+j-1} D$$

$$= L^m D (1 + L + L^2 + \dots + L^{j-1})$$

$$\leq L^m D \sum_{k=0}^{\infty} L^k \leq \frac{L^m D}{1-L}$$

$\uparrow$ serie geometrica

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = \frac{L^N D}{1-L} < \varepsilon ; \text{ questo è vero}$$

perché $\frac{L^N D}{1-L} \rightarrow 0$ dato che $L < 1$.

Possiamo dire che la successione è di Cauchy e quindi converge: $x_m \rightarrow \bar{x}$.

Dato che f è lipschitziana e anche continua, quindi possiamo dire che $f(x_n) \rightarrow f(\bar{x})$.

$$d(f(x_n), f(\bar{x})) \leq L \cdot d(x_n, \bar{x}) \rightarrow L \cdot 0 = 0$$

Dimostriamo infine che $\bar{x}$ è l'unico punto fisso. Supponiamo $\exists \tilde{x} = f(\tilde{x})$.

$$d(\tilde{x}, \bar{x}) > L \cdot d(\tilde{x}, \bar{x}) \geq d(f(\tilde{x}), f(\bar{x})) = d(\tilde{x}, \bar{x})$$

ma questo è possibile solo se $d(\tilde{x}, \bar{x}) = 0$
 $\Rightarrow \tilde{x} = \bar{x}$.



20/02/2026 - Poolini

Esercizi del Test settimanale

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^p (\ln x)^q} dx$$

Oss: $+\infty$ è l'unico punto critico

Devo lavorare con $\frac{1}{x^p (\ln x)^q}$ per $x \rightarrow +\infty$

Con cosa lo posso confrontare?

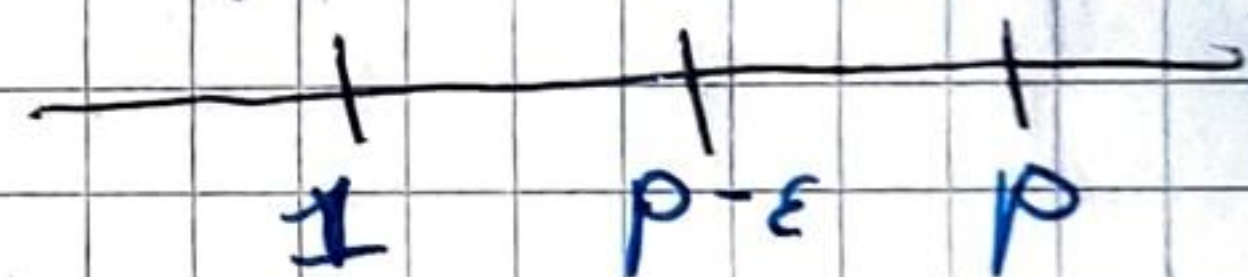
$$\frac{1}{x^p (\ln x)^q} \ll \frac{1}{x} \text{ se } q > 0, \text{ perché } 1 \ll \ln x \ll x^\alpha \quad \forall \alpha > 0$$

$$\text{Se invece } q < 0 \Rightarrow 1 \ll \ln x \ll x^\epsilon$$

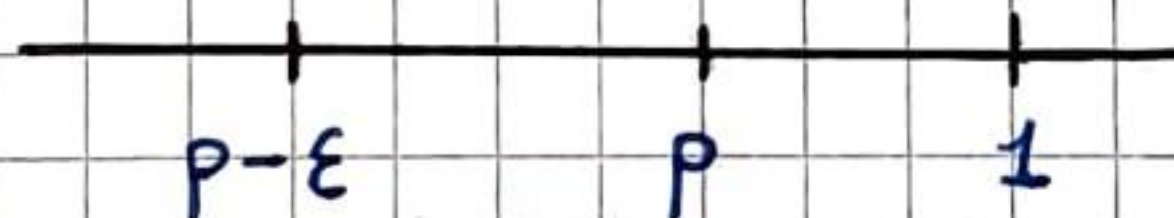
$$\frac{1}{x^{p-\epsilon}} \ll \frac{1}{x^p (\ln x)^q} \ll \frac{1}{x^{p-\epsilon}} \text{ per } x \rightarrow +\infty$$

perché "colgo" x^ϵ da x^p

Quindi converge se $p - \epsilon > 1 \Rightarrow p > 1$ perché posso "stringere e picciere"



Diverge se $p - \epsilon < 1 \Rightarrow p < 1$



Ad esempio potrei usare $\epsilon = \frac{p-1}{2}$ per $p + \epsilon > 1$

$\epsilon = \frac{1-p}{2}$ per $p - \epsilon > 1$

CASO $p = 1$

$$\int \frac{1}{x (\ln x)^q} dx$$

Lo calcolo facilmente perché $\frac{1}{x} dx = d(\ln x)$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{(\ln x)^q} \cdot \frac{1}{x} dx = \int (\ln x)^{-q} d(\ln x) = \frac{(\ln x)^{1-q}}{1-q} \Rightarrow q > 1$$

RECAP

- $p > 1$ converge
- $p < 1$ diverge
- $p = 1$ converge

$$\int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{1}{x^p |\ln x|^q}$$

Oss: x^p è finito $\Rightarrow$ posso ignorarlo

$\ln(1+t) \sim t$ al 1° ordine per $t \rightarrow 0$

$\Rightarrow \ln(x) \sim x-1$ per $x \rightarrow 1$

Quindi l'integrale avrà lo stesso carattere di: $\int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{1}{|x-1|^q} dx$

ovvero (cambiando variabile) $\int_{-\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{|y|^q} dy$ che converge $\Leftrightarrow q < 1$

$$\int_1^{+\infty} \cos(x^2) dx$$

Sostituisco $t = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{t} = t^{\frac{1}{2}}$
 $\Rightarrow dx = \frac{1}{2\sqrt{t}} dt$

L'integrale diventa $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{2\sqrt{t}} dt$

$\cos t$ ha media nulla sul periodo $\Rightarrow$ l'integrale converge

Oss: $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} dt = +\infty$, non converge

MA IDEA: $t^{-\frac{1}{2}}$ non converge,

MA se lo derivo, $t^{-\frac{3}{2}}$ converge $\Rightarrow$ uso integrazione per parti

Quindi $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{2\sqrt{t}} dt = \left[\frac{\sin t}{2\sqrt{t}} \right]_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{\frac{3}{2}}} dt =$

$= 0 - \frac{\sin(1)}{2} + \text{QUALCOSA CHE CONVERGE, perché } \frac{3}{2} > 1$

Oss: La convergenza semplice può "cambiare" per parti.

Nota: Rivedere il criterio di Dirichlet

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x \sqrt{|\ln x| + |\ln x|^4}}$$

Possibili punti critici: 0, +∞, 1

L'integrale converge $\Leftrightarrow$ converge nei punti critici

In 0

Per $x \rightarrow 0$, $\frac{1}{x}$ andrebbe a infinito

MA la radice mi salva!

In $x \sqrt{|\ln x| + |\ln x|^4}$ il termine più rilevante è la quarta potenza

$$\sim x |\ln x|^2$$

Dunque $\int_0 \frac{1}{x |\ln x|^2} = \int_0 \frac{1}{-x (\ln x)^2}$ perché intorno a 0 $\ln x < 0$

$$= \int_0 \frac{1}{-(\ln x)^2} \cdot \frac{1}{x} dx = \int_0 \frac{1}{(\ln x)^2} (d \ln x) =$$

cambio
variabile
 $y = \ln x$
 $dy = \frac{1}{x} dx$

$$= \int_{-\infty} \frac{1}{|y|^2} \text{ che converge perché } \frac{1}{2} > 1$$

Nota: $\int_0 \frac{1}{x |\ln x|^p}$ converge $\Leftrightarrow p > 1$

In 1

Per $x \rightarrow 1$ $\frac{1}{x \sqrt{|\ln x| + |\ln x|^4}} \sim \frac{1}{\sqrt{|\ln x|}} \sim \frac{1}{\sqrt{x-1}}$

$$(|\ln x| + |\ln x|^4) = |\ln x| (1 + |\ln x|^3) \sim |\ln x| \cdot 1$$

$$\int_1 \frac{1}{\sqrt{x-1}} \text{ converge perché } \frac{1}{2} < 1$$

In +∞

Per $x \rightarrow +\infty$ $\frac{1}{x \sqrt{|\ln x| + |\ln x|^4}} \sim \frac{1}{x |\ln x|^2} \sim \frac{1}{x (\ln x)^2}$

$$\Rightarrow \int_{+\infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln^2 x} dx = \int_{+\infty} \frac{1}{y^2} dy \quad \text{con il cambio variabile } y = \ln x$$

Quindi l'integrale converge perché $2 > 1$; visto che converge

in 0, 1, +∞ $\Rightarrow$ converge su tutto. Oss: $\int_{+\infty} \frac{1}{x} dx$ diverge

MA $\int_{+\infty} \frac{1}{x |\ln x|^p} dx$ converge $\Leftrightarrow p > 1$