

Soluzioni prova scritta parziale n. 2

Laurea in Fisica – 2025/26

21 febbraio 2026

1. Si consideri la successione

$$a_k = e^{-\frac{1}{2k^2}} - \cos \frac{1}{k}.$$

(a) Mostrare che esiste k_0 tale che $a_k \geq 0$ per ogni $k \geq k_0$.

(b) Dire per quali $\alpha > 0$ la serie

$$\sum_{k=k_0}^{+\infty} \sin(k\pi + a_k^\alpha)$$

è assolutamente convergente.

(c) Dire per quali $\alpha > 0$ la serie precedente è convergente.

Soluzione. (a) Consideriamo la funzione $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} - \cos x$. Sviluppiamo in serie di Taylor per $x \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2), \\ e^{-x^2/2} &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o(x^4), \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4). \end{aligned}$$

da cui per $k \rightarrow +\infty$

$$a_k = f\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{12k^4} + o\left(\frac{1}{k^4}\right) = \frac{\frac{1}{12} + o(1)}{k^4}.$$

Il denominatore è positivo, il numeratore tende a $\frac{1}{12} > 0$, quindi, per la permanenza del segno esiste k_0 tale che $a_k \geq 0$ per ogni $k \geq k_0$.

(b) Osserviamo che $\sin(k\pi + a_k^\alpha) = (-1)^k \sin(a_k^\alpha)$. Per la convergenza assoluta studiamo $|\sin(a_k^\alpha)|$. Poiché $a_k \sim \frac{1}{12k^4}$ per $k \rightarrow +\infty$, abbiamo $a_k^\alpha \sim \frac{1}{12k^{4\alpha}}$ e quindi $\sin(a_k^\alpha) \sim a_k^\alpha \sim \frac{c}{k^{4\alpha}}$ per $\alpha > 0$. La serie $\sum k^{-4\alpha}$ converge se e solo se $4\alpha > 1$, cioè $\alpha > \frac{1}{4}$.

(c) La serie $\sum (-1)^k \sin(a_k^\alpha)$ è definitivamente a segni alterni. Abbiamo $\sin(a_k^\alpha) \sim a_k^\alpha \rightarrow 0$. Per poter applicare il criterio di Leibniz dobbiamo solo verificare che a_k è definitivamente decrescente. Sappiamo che il polinomio di Taylor del quarto ordine della funzione f è $\frac{x^4}{12}$. Allora il polinomio di Taylor del terzo ordine per la derivata f' è $\frac{x^3}{3}$. Dunque $f'(x)$ è positiva in un intorno di 0^+ ed è quindi decrescente in tale intorno. Di conseguenza la successione $a_k = f(1/k)$ è decrescente in un intorno di $+\infty$. $\square$

2. Si consideri la funzione

$$F(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{arctg} t}{t \cdot e^t} dt.$$

(a) Dimostrare che F è ben definita e limitata su $(0, +\infty)$.

(b) Mostrare che esiste $a \in \mathbb{R}$ tale che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x (a - F(x))$$

è finito.

(c) Determinare se il limite

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x F(x)$$

esiste e in caso se è finito o infinito.

Soluzione. (a) La funzione integranda $f(t)$ ha limite 1 per $t \rightarrow 0$ dunque può essere estesa per continuità a tutto $\mathbb{R}$. Dunque l'integrale è ben definito per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Per $t \rightarrow +\infty$

$$f(t) \ll e^{-t}$$

e visto che $\int_0^{+\infty} e^{-t} dt$ è convergente, anche l'integrale

$$I = \int_0^{+\infty} f(t) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$$

è convergente. Visto che F è continua su $[0, +\infty]$ per il teorema di Weierstrass è una funzione limitata.

(b) Se $a \neq I$ si ha che $a - F(x)$ ha limite diverso da zero e quindi $e^x(a - F(x))$ tende a $+\infty$. Dunque l'unica possibilità per avere un limite finito è che sia $a = A$. In tal caso

$$e^x(a - F(x)) = \frac{a - F(x)}{e^{-x}}$$

è una forma indeterminata $\frac{0}{0}$ per $x \rightarrow +\infty$. Possiamo quindi provare ad applicare il teorema di de L'Hospital, ricordando che $F' = f$ per il teorema fondamentale del calcolo:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-F'(x)}{-e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arctg x}{x \cdot e^x \cdot e^{-x}} = \frac{\pi/2}{+\infty} = 0.$$

Dunque $a = A$ è l'unico valore per cui il limite è finito.

(c) Per $x \rightarrow -\infty$ la funzione integranda $f(x)$ tende all'infinito e quindi anche l'integrale $F(x)$. Dunque siamo di fronte ad una forma indeterminata del tipo $0 \cdot \infty$ che possiamo riscrivere nella forma $\frac{\infty}{\infty}$. Possiamo quindi applicare nuovamente de L'Hospital

$$\frac{F'(x)}{(e^{-x})'} = \frac{f(x)}{-e^{-x}}$$

e otteniamo anche in questo caso che per $x \rightarrow -\infty$ il limite è 0. □