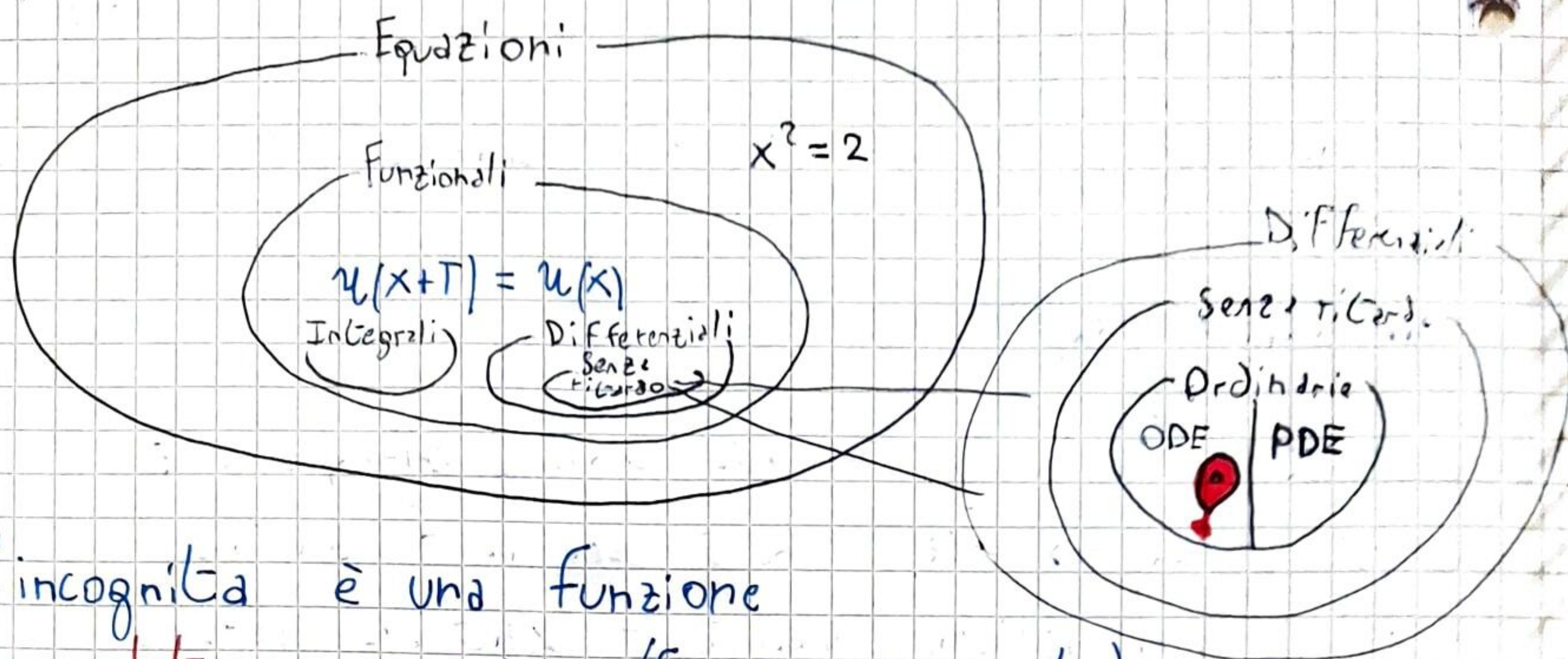


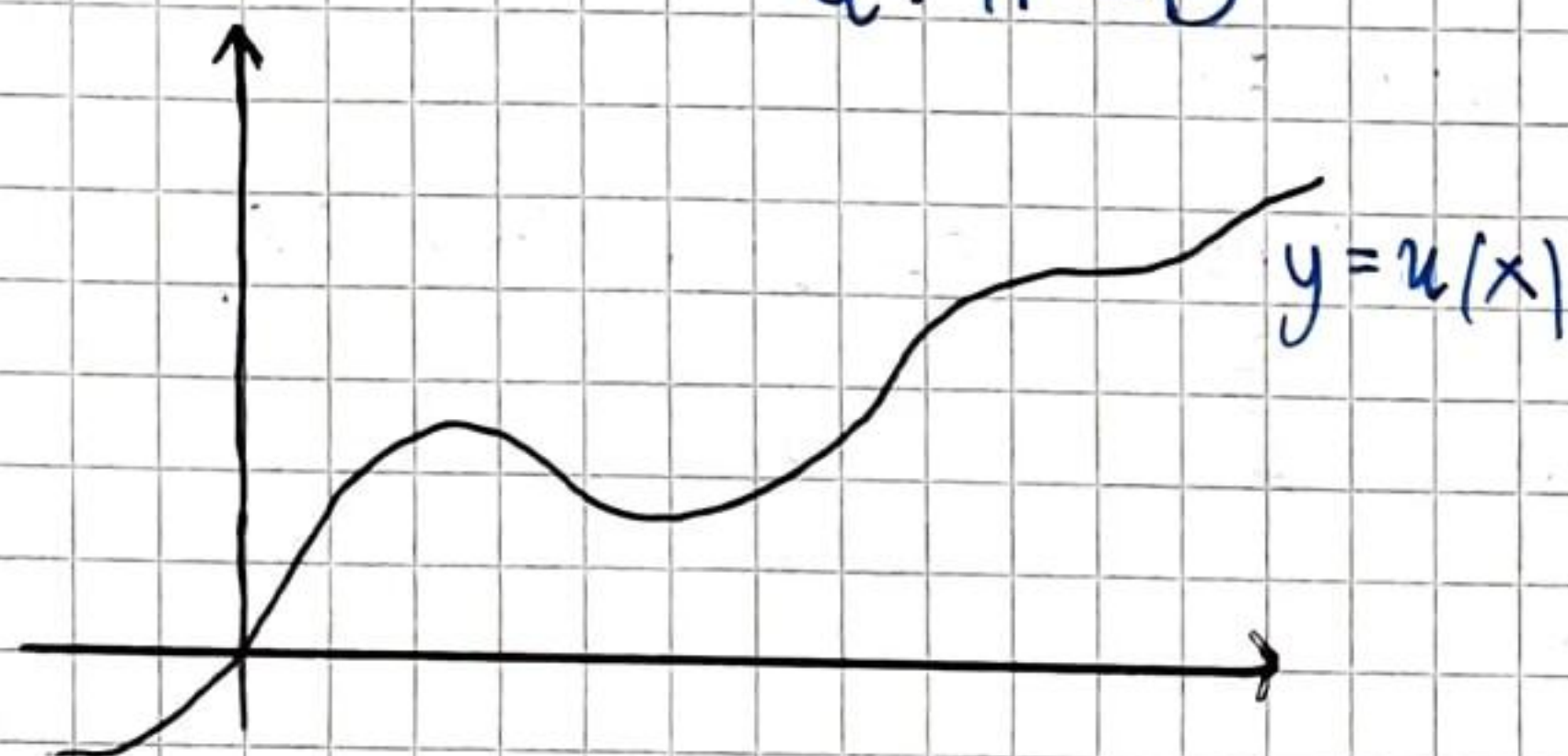
23/02/2026 - Polini

Capitolo 8 - Equazioni differenziali



L'incognita è una funzione

Nomenclatura: $u = u(x)$ (funzione incognita)
 $u: A \rightarrow B$



Esempio $u(x+T) = u(x)$:

È risolta da tutte le funzioni T -periodiche

Altre notazioni
GIUSTI

$$y = y(x)$$

$$x = x(t)$$

$$y = y(t)$$

} c'è un abuso di notazione
per cui y è sia la variabile
dipendente sia la funzione
(come v a fisica)

C'è lo spazio dove vive la funzione nel senso di grafico
C'è lo spazio vettoriale ambiente dove è definita
la funzione (spazio in cui una funzione è
punto; ha $\dim = +\infty$)

Se posso fare le derivate, si tratta di un'equazione differenziale

Esempio: $u'(x) = u^2(x)$ EQ. DIFFERENZIALE SENZA RITARDO

$$\int_0^1 u(x) dx = 1 \quad \text{EQ. INTEGRALE}$$

$$u'(x) = u^2(x+1) \quad \text{EQ. DIFFERENZIALE CON RITARDO}$$

$$u'' = u^2(x) \quad \text{EQ. DIFFERENZIALE SENZA RITARDO}$$

Na affrontiamo principalmente le

EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE ODE $u(x) = u; x \in \mathbb{R}$

Non sono ordinarie le equazioni con derivate parziali PDE

$$x \in \mathbb{R}^m \quad \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_m}$$

$$\Delta u = f \quad \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad \leftarrow \text{Tipo Maxwell, calore, onda, Schrödinger}$$

~~Ma~~ Generalmente per risolvere le PDE, le riconduciamo alle ODE

Un'altra suddivisione trasversale (alle categorie) è

tra equazioni LINEARI

e NON LINEARI

~~Se~~ Tipo $\Delta u = u^2$ non è lineare

Eq. A.

Equazioni differenziali ordinarie (senza fittico)

$$F(x, u(x), u'(x), \dots, u^{(m)}(x)) = 0 \quad \text{generica ODE}$$

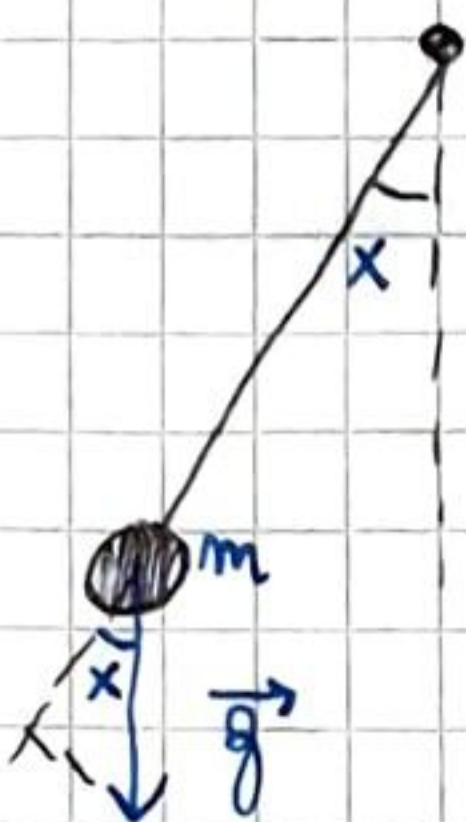
$$u: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$$

dipendenza da u e derivate

x

$m = \text{ordine dell'equazione}$

Esempio: Equazione del pendolo smorzato



$$\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow u''(x) + \sin(u(x)) + u'(x) = 0$$

~~$\sin(x)$~~

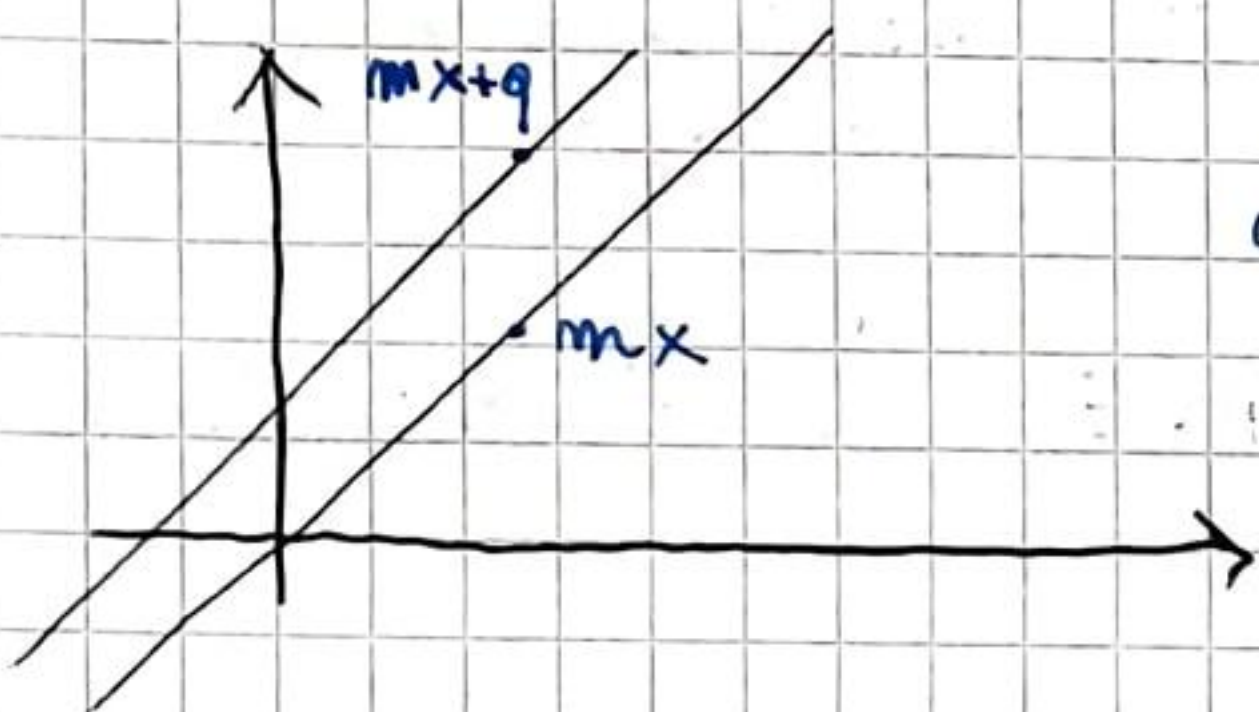
Forza peso

Forza di attrito con l'aria

Suppongo ci sia $\vec{F}_A \propto \vec{v}$

L'equazione è non lineare perché c'è $\sin(u(x))$

Def. Se F è lineare, diremo l'equazione è LINEARE



ditto LINEARE OMOGENEA se $q=0$

Se $F(x, 0, \dots, 0) = 0$ l'equazione è lineare omogenea (ed è in senso algebrico un'applicazione lineare)

$$u''(x) + \sin(u(x)) + u'(x) = 0 \quad F(x, y, z, w) \quad \text{II ORDINE}$$

indipendenti $\uparrow \uparrow \uparrow$
 $u \quad u' \quad u''$

$$\Rightarrow w + \sin(y) + z = 0$$

$$F(x, u, u', u'') = 0$$

$$F: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

Se F è lineare nelle variabili $u, u', \dots, u^{(m)}$

l'equazione è LINEARE

Esempio Piccole oscillazioni

$$\sin y \sim y$$

$$\Rightarrow u''(x) + u'(x) + u(x) = 0$$

$$F(x, y, z, w) = w + y + z$$

0 è soluzione (il pendolo fermo resta fermo)

È un oscillatore armonico smorzato

Oss: In una differenziale, è sottointeso che $u(x)$ è soluzione $\forall x$

Posso scrivere le equazioni in forma algebrica o funzionale

$$\Rightarrow u'' + u + u' = 0 \leftarrow \text{La funzione zero}$$

Qual è il dominio di questa eq.? (forma funzionale)

~~$\Rightarrow \frac{1}{x} = 3, x \neq 0$~~ Tipo $\frac{1}{x} = 3, x \neq 0$

Qui faccio la derivata due volte $\Rightarrow u \in C^2$

$$L: C^2 \longrightarrow C \quad L(u) = u'' + u + u'$$

Facendo la derivata due volte trovo una funzione continua (non necessariamente derivabile)

$\Rightarrow$ la soluzione è continua

C^2 è spazio vettoriale...

$\Rightarrow$ Trovare le soluzioni di $u'' + u' + u = 0$ è come trovare il $\text{Ker}(L(u))$

Perché si chiama Teo spettrale?

Lo spettro della luce trovato da Newton si risolve attraverso la ricerca di autovalori di un operatore

Le orbite sono quantizzate e sono gli autovalori di Schrödinger (dell'operatore)

Equazioni autonome

$$F(\cancel{x}, u, u', \dots, u^{(n)}) = F(u', \dots, u^{(n)})$$

Non compare x

$$u''(x) + u'(x) = 0 \quad \text{Oscillatore armonico AUTONOMA}$$

$$\Rightarrow u'' + u' = 0$$

$$F(x, y, w, z) = y + z, \text{ non c'è } x$$

Esempi: $f(x) = u'' + u$ Oscillatore forzato
NON AUTONOMA

Se u è soluzione, posso traslarla nel tempo!

$$u(x) = u(x+t)$$

La mia legge fisica non dipende da quando parto
MA se ho una forza che dipende dal tempo... potrebbe fare la differenza

$\Rightarrow$ Nelle AUTONOME il tempo ha origine arbitraria

Equazioni in forma normale

Posso esplicitare la derivata di ordine massimo

Se riesco a scrivere

$$u^{(m)}(x) = f(x, u(x), \dots, u^{(m-1)}(x))$$

so risolverla

m -termini
ordine m

Analogia:

$$x^2 = z + x$$

$$x^2 = z$$

NON NORMALE

$$x = \sqrt{z+x}$$

$$x = \sqrt{z}$$

NORMALE

$$x^2 + y^2 = 1$$

NON NORMALE

$$y = \sqrt{1-x^2}$$

NORMALE



Qui spero in una soluzione (che $\exists$ ed è unica)

In forma normale scelgo uno dei due segni (per esempio)

Da PDE a ODE

Le ODE si risolvono numericamente

Da ODE a integrale

Considero la ODE risolta, anche l'integrale fosse ellittico
si risolve numericamente

OBIETTIVO: Ridursi all' ODE più semplice

$$u' = F$$

$$\Rightarrow u'(x) = f(x) \quad \forall x \text{ dove è definito } f$$

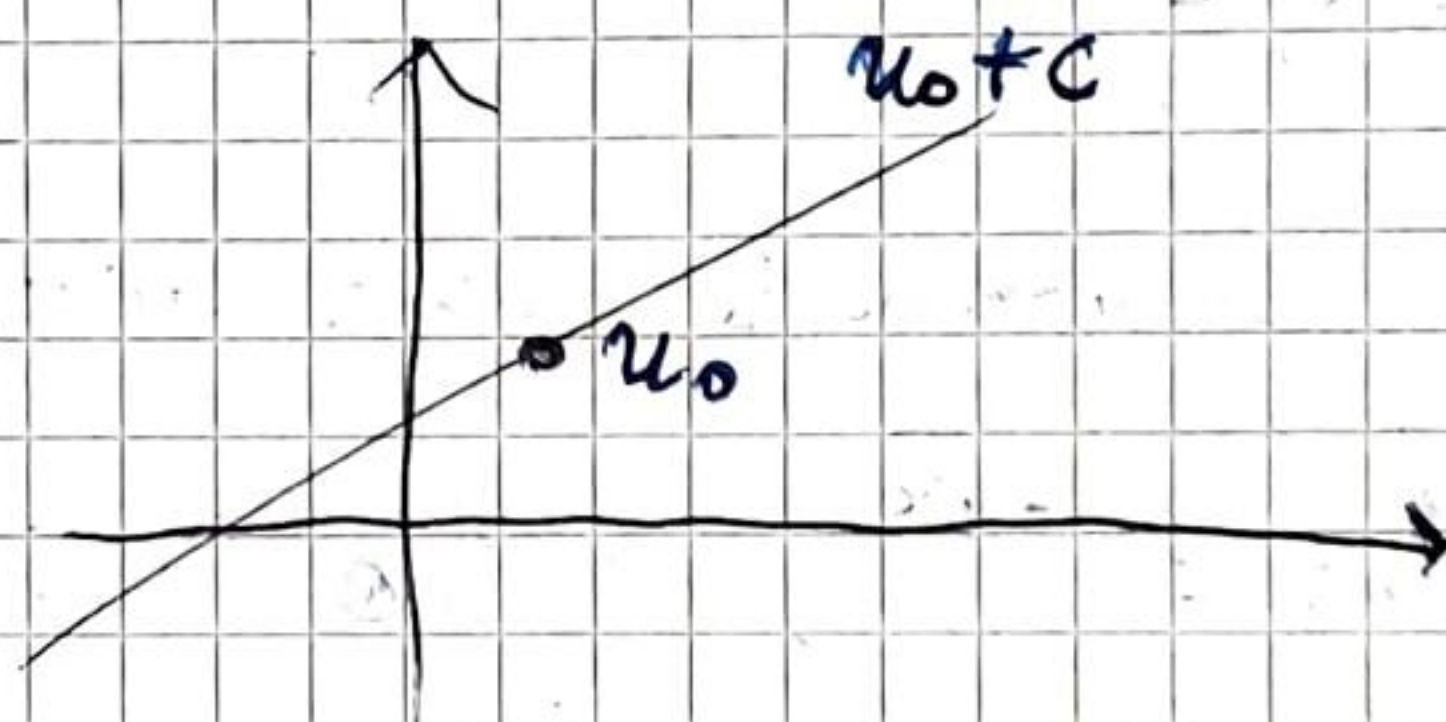
Esempio: $u' = 3x + 2$

$$\Rightarrow u \in \int f \quad u \text{ è una primitiva di } f$$

è uno spazio lineare affine di dimensione 1
se $x \in I$ intervallo

$I = \mathbb{R}$ qui

$$u(x) = \frac{3}{2}x^2 + 2x + c \\ = u_0 + c$$



Equazioni lineari (ordinarie) del I ordine

Ho un'equazione

- La classifico

- Applico il metodo risolutivo

$$\text{I ORDINE} \quad a(x)u'(x) + b(x)u(x) = c(x)$$

In realtà questo non lo so risolvere...

serve la FORMA NORMALE

Divido per $a(x)$

$$u'(x) + u(x) \frac{b(x)}{a(x)} = \frac{c(x)}{a(x)}$$

mi serve supporte $a(x) \neq 0$ e risolvere in quei punti

$$u'(x) + A(x)u(x) = B(x)$$

Idea: Posso ricondurre al prodotto tra derivate

FATTORE INTEGRANTE:

$$e^{\int a(x) dx}$$

$$A \in \mathcal{S}_a$$

Moltiplico tutto per e^A

$$\Rightarrow e^A u'(x) + e^A a(x) u(x) = b(x) e^{A(x)}$$

$$e^A u'(x) + e^A A'(x) u(x) = b(x) e^{A(x)}$$

derivata del prodotto

$$(u(x) e^{A(x)})' = b(x) e^{A(x)}$$

non compare u

$$u(x) e^{A(x)} \in \int b(x) e^{A(x)} dx$$

$$\Rightarrow u(x) \in e^{-A(x)} \int b(t) e^{A(t)} dt$$

↑
ci vorrebbe la costante additiva

$$\cancel{u(x)} \quad u(x) = e^{-A(x)} \left[\int b(t) e^{A(t)} dt + c \right] \quad \text{se } x \in I; I \text{ intervallo}$$

↑
una qualunque primitiva

Nota: STUDIA METODO

Esempio:
DAGLI APPUNTI

$$u'(x) = \lambda u(x)$$

$Du = \lambda u$ sto cercando gli
autovalori dell'operatore D

$$u'(x) - \lambda u = 0$$

Se $a(x) = a$ costante diremo che l'equazione lineare è a

COEFFICIENTI COSTANTI

$$a(x) = -\lambda \text{ costante}$$

$$\Rightarrow A(x) = \int a(x) dx = -\lambda x \quad \text{prendo una qualunque primitiva}$$

$$u'(x) e^{-\lambda x} - \lambda e^{-\lambda x} u(x) = 0$$

Oss: l'esponentiale è sempre $\neq 0$