

25 feb 2026 - Lezione 59

RECAP

EQ. DIFF. ORDINARIE DEL 1° ORDINE
IN FORMA NORMALE

$$u'(x) = \phi(u(x), x)$$

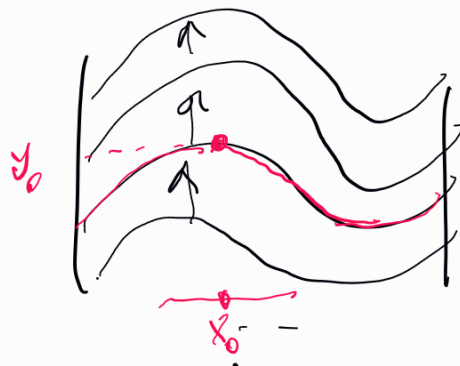
METODI RISOLUTIVI

① $\begin{cases} u' = f \\ u(x_0) = y_0 \end{cases}$
Le sol sono $\int f(x) dx$

$$\phi(u, x) = f(x)$$

$$f: I \rightarrow \mathbb{R}$$

$$u(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t) dt$$



② $\begin{cases} u' + a(x)u = b(x) \\ u(x_0) = y_0 \end{cases}$
 $u(x) = e^{-A(x)} \int b(x) e^{A(x)} dx$

$$\phi(u, x) = -a(x)u + b(x)$$

$$A'(x) = a(x)$$

$$\frac{d}{dx} \left(e^{A(x)} u(x) \right) = b(x) e^{A(x)}$$

integrare tra x_0 e x

$$\int_{x_0}^x \frac{d}{dt} (e^{A(t)} u(t)) dt = \int_{x_0}^x b(t) e^{A(t)} dt$$

$$e^{A(x)} u(x) = e^{A(x_0)} \underbrace{u(x_0)}_{y_0} + \int_{x_0}^x b(t) e^{A(t)} dt$$

$$u(x) = e^{A(x_0) - A(x)} y_0 + e^{-A(x)} \int_{x_0}^x u(t) e^{A(t)} dt$$

EQ. AUTONOME

$$u' = f(u)$$

$$\Phi(u, x) = f(u)$$

oss: se u è soluzione $\Rightarrow v_a(x) := u(x+a)$ è soluzione
 se $f(y_0) = 0 \Rightarrow u \equiv y_0$ è sol $\forall a \in \mathbb{R}$

EQ. A VAR SEPARABILI

Problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = f(u) g(x) & (E) \\ u(x_0) = y_0 & (CI) \end{cases}$$

se $f(y_0) = 0 \Rightarrow u \equiv y_0$ è soluzione

$$\Phi(u, x) = f(u) g(x)$$

$$\frac{u'(x)}{f(u(x))} = g(x) \quad (*)$$

funzioni continue
 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$
 $g: J \rightarrow \mathbb{R}$

se $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ e $G: J \rightarrow \mathbb{R}$ sono tali che

$$G'(x) = g(x)$$

$$F'(y) = \frac{1}{f(y)}$$

se $f(y_0) \neq 0$

(*) diventa:

$$F'(u(x)) u'(x) = G'(x)$$

$\int$

$$\frac{d}{dx}(F(u(x)))$$

integro tra x e x_0

$$\int_{x_0}^x \frac{d}{dt}(F(u(t))) dt = \int_{x_0}^x G'(t) dt = G(x) - G(x_0)$$

$$F(u(x)) - F(y_0)$$

sol. in forma
implicita

$$F(u(x)) = F(y_0) + G(x) - G(x_0)$$

$$f(y_0) \neq 0 \quad F'(y_0) = \frac{1}{f(y_0)} \neq 0 \Rightarrow F \text{ è loc. invertib.}$$

cioè $\exists I_0$ intorno di y_0 tale che $F|_{I_0} : I_0 \xrightarrow{\sim} F(I_0)$ è INVERTIBILE

$$u(x) = \left(F|_{I_0} \right)^{-1} \left(F(y_0) + G(x) - G(x_0) \right)$$

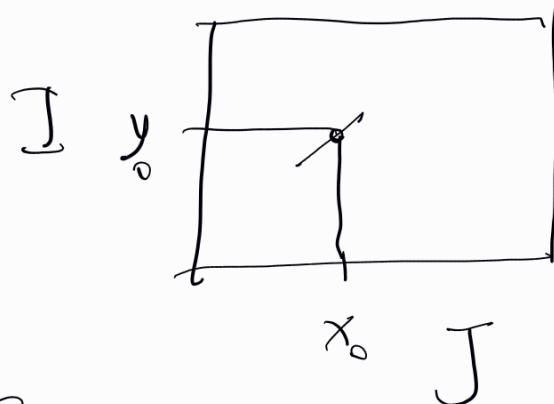
per x in un intorno di x_0

$\in \text{dom}((F|_{I_0})') = F(I_0)$

Siamo in grado di scrivere una formula esplicita
 $\Leftrightarrow$ siamo in grado di trovare F, G
 $\rightarrow$ " " " di invertire $F|_{I_0}$

Q: l'intervallo massimale su cui esiste
la soluzione è J ?

COSA POTREBBE ANDARE STORTO?



$$I \times J = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} u' = |u|^\alpha \\ u(0) = y_0 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha > 0 \\ \alpha \neq 1 \\ \text{caso già visto} \end{cases} \quad \text{e } \alpha = 1 \begin{cases} u' = u \\ u' = -u \end{cases}$$

$\phi(u, x) = |u|^\alpha$ è definita $\forall u \in \mathbb{R}$

$$\frac{u'}{|u|^\alpha} = 1$$

$$\frac{1}{f(u)} = |u|^{-\alpha}$$

$$F(u) = \frac{1}{1-\alpha} |u|^{1-\alpha} \operatorname{sgn}(u)$$

$$g(x) = 1$$

$$G(x) = x$$

$$F(u(x)) = F(y_0) + G(x) - \cancel{G(x_0)}$$

$$\frac{1}{1-\alpha} |u|^{1-\alpha} \operatorname{sgn}(u) = \frac{1}{1-\alpha} y_0^{1-\alpha} \operatorname{sgn}(y_0) + x$$

$$|u|^{1-\alpha} = y_0^{1-\alpha} + (1-\alpha)x \quad (*)$$

$$u(x) = \left(y_0^{1-\alpha} + (1-\alpha)x \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

in un intorno di x_0

Vediamo cosa succede se

$$\alpha = 2$$

$$u(x)^{-1} = y_0^{-1} - x$$

(★1) per $\alpha=2$

$$u(x) = \frac{1}{y_0^{-1} - x} = \frac{y_0}{1 - y_0 x}$$

$$F(u) = u^{-1}$$

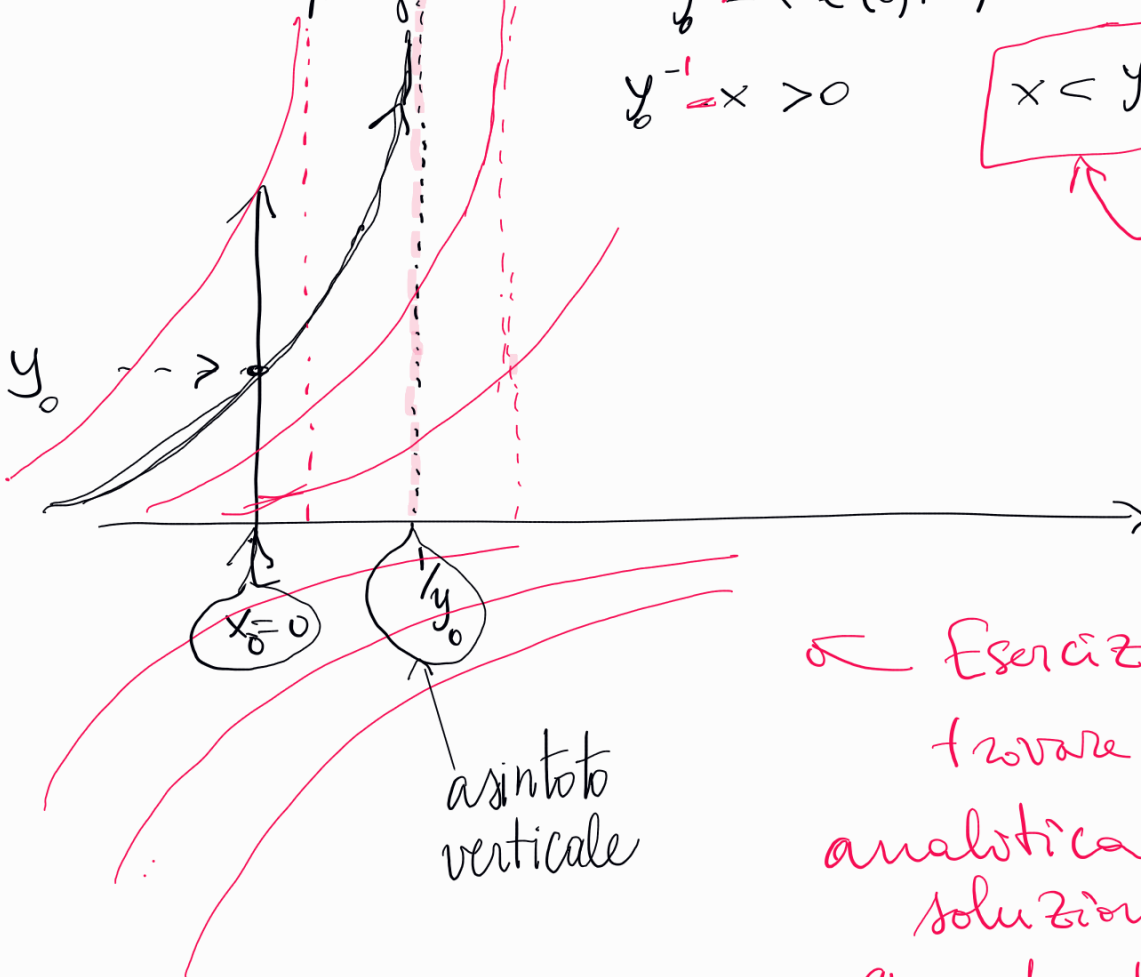
$$I_0 = (0, +\infty)$$

$$F(I_0) = (0, +\infty)$$

per gli x t.c. $y_0^{-1} - x \in (0, +\infty)$

$$y_0^{-1} - x > 0$$

$$x < y_0^{-1}$$



← Esercizio:
trovare la forma
analitica delle
soluzioni
quando $y_0 < 0$

Se $\alpha = \frac{1}{2}$

$$u(x)^{1-\alpha} = y_0^{1-\alpha} + (1-\alpha)x \quad (\star 1)$$

$$1-\alpha = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{1-\alpha} = 2$$

$$u(x)^{1/2} = \sqrt{y_0} + \frac{1}{2}x$$

$$F(u) = u^{1/2} [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$$

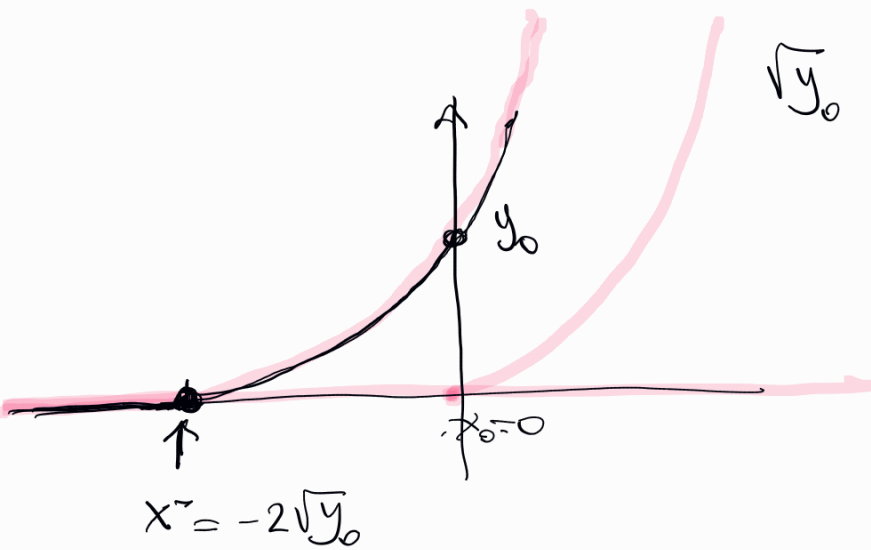
$$u(x) = \left(\sqrt{y_0} + \frac{1}{2}x \right)^2$$

è valida fintanto che
 $\sqrt{y_0} + \frac{1}{2}x \in [0, +\infty)$

$$\sqrt{y_0} + \frac{1}{2}x \geq 0$$

$$x \geq -2\sqrt{y_0}$$

$$u(x) = \begin{cases} (\sqrt{y_0} + \frac{1}{2}x)^2 & x \geq x^- \\ 0 & x < x^- \end{cases}$$



Caso di
non unicità

è definita su $\mathbb{R}$
 ed è soluzione

$$\begin{cases} u' = \sin u & (E) \\ u(0) = \frac{\pi}{2} & (CI) \end{cases}$$

$$\Phi(u, x) = \sin u$$

eq autonoma

Se u sol di (E) $\Rightarrow u(x+a)$ sol di (E)

2π -periodicità

$\sin$ è dispari

$\Rightarrow v(x) = 2\pi + u$ è sol di (E)

$\Rightarrow v(x) = -u(x)$ è sol di (E)

$$\frac{1}{f(y)} = \frac{1}{\sin y}$$

$$\int \frac{1}{\sin y} dy = \int \frac{\sin y}{\sin^2 y} dy$$

PRIMO
METODO

$$= \int \frac{\sin y}{1 - \cos^2 y} dy$$

$$= \int \frac{dz}{1 - z^2}$$

$$\begin{cases} z = -\cos y \\ dz = \sin y dy \end{cases}$$

$$= \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{1-z} + \frac{1}{1+z} \right) dz$$

$$= \frac{1}{2} \log \left| \frac{1+z}{1-z} \right| + c$$

$$F(y) = \frac{1}{2} \log \left| \frac{1 - \cos y}{1 + \cos y} \right|$$

metodo alternativo

$$\int \frac{1}{\sin y} dy =$$

$$t = \tan\left(\frac{y}{2}\right)$$

$$\begin{cases} \sin y = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos y = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases}$$

$$y = 2 \arctan t$$

$$dy = \frac{2}{1+t^2} dt$$

$$= \int \frac{1}{\cancel{2t/(1+t^2)}} \cdot \frac{\cancel{2}}{\cancel{1+t^2}} dt = \int \frac{1}{t} dt$$

$$= \log \left| \tan\left(\frac{y}{2}\right) \right| + c$$

$$F(y) = \log \left| \tan\left(\frac{y}{2}\right) \right|$$

OSS: il risultato
è solo apparentemente

diverso

↖ conviene usare
questa seconda
espressione

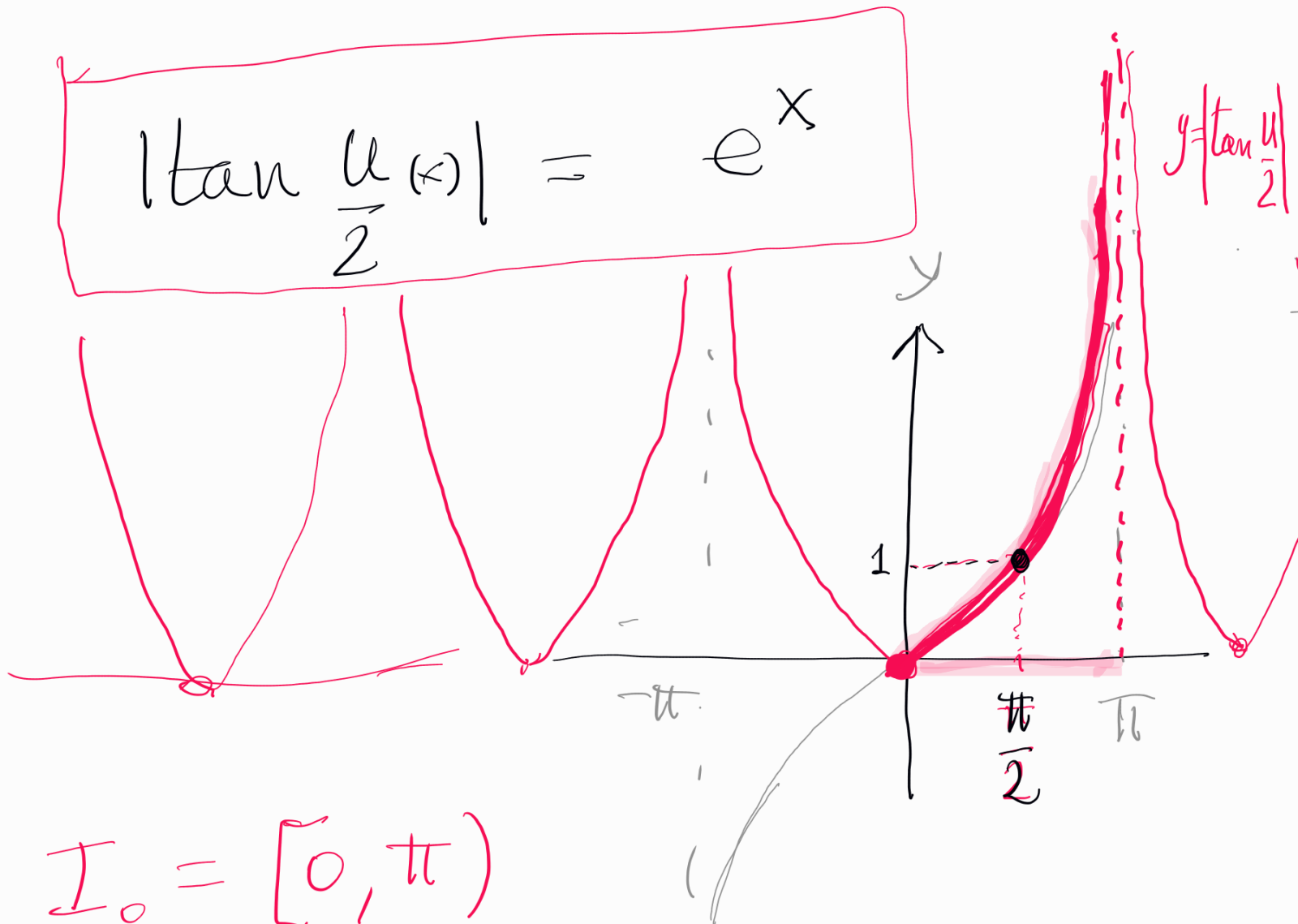
$$y_0 = \frac{\pi}{2}$$

$$x_0 = 0$$

$$F(u) = F(y_0) \neq x$$

$$\log \left| \tan \frac{u(x)}{2} \right| = \log \left| \tan \frac{\pi}{2} \right| + x$$

$$\left| \tan \frac{u(x)}{2} \right| = e^x$$



$$I_0 = [0, \pi)$$

↖ intorno massimale di $\frac{\pi}{2}$ su cui F è invertibile

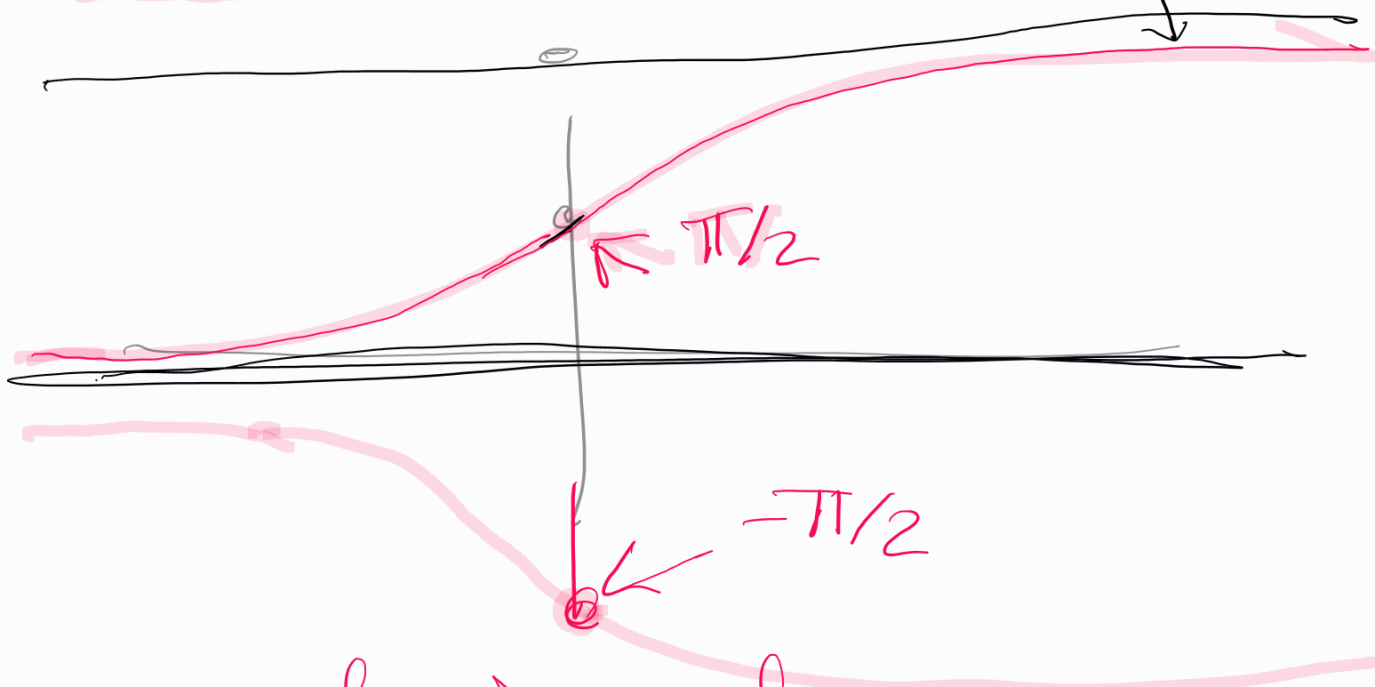
$$F(I_0) = [0, +\infty)$$

$$(F_{I_0})^{-1} : [0, +\infty) \rightarrow [0, \pi]$$

$$\tan \frac{u(x)}{2} = e^x$$

$$u(x) = 2 \arctan e^x$$

grafico
della
soluz.



E se volessi risolvere

$$\begin{cases} u' = \sin u \\ u(0) = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

con passaggi
analoghi a
quelli già visti si ottiene $\rightarrow$

$$\left| \tan \frac{u(x)}{2} \right| = e^x$$

$v = u + 2\pi$ è ancora
soluzione

e ha condizione iniziale

$$v(0) = u(0) + 2\pi = \frac{3\pi}{2}$$

oppure si inverte F su $I_0 = [\pi, 2\pi]$

ES per caso

forma implicita
della

Trovare la soluzione di

$$\begin{cases} u' = \frac{1}{1+u^2} \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

e verificare che è definita
su $\mathbb{R}$