

ANALISI MATEMATICA B

LEZIONE 60 - 27.2.2026

Problema di Cauchy:

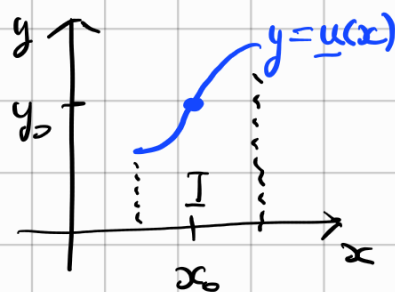
$$\begin{cases} \underline{u}'(x) = \underline{f}(x, \underline{u}(x)) \\ \underline{u}(x_0) = \underline{y}_0 \end{cases}$$

condizione iniziale
di Cauchy

$$\underline{u}: I \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\underline{u}(x) = \begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \\ \vdots \\ u_n(x) \end{pmatrix}$$

$$\underline{f}(x, \underline{y}) = \begin{pmatrix} f_1(x, \underline{y}) \\ \vdots \\ f_n(x, \underline{y}) \end{pmatrix}$$



$$\begin{cases} u_1'(x) = f_1(x, u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)) \\ u_2'(x) = f_2(x, u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)) \\ \vdots \\ u_m'(x) = f_m(x, u_1(x), \dots, u_n(x)) \\ u_1(x) = y_1 = (y_0)_1 \\ \vdots \\ u_m(x) = y_m = (y_0)_m \end{cases}$$

SISTEMA DI

n -equazioni
del I ordine
in forma normale

Oss Una equazione (o un sistema) differenziale di ordine n si riconduce a n equazioni del I ordine.

EQ. di ordine n in forma normale:

$$u^{(n)}(x) = f(x, u(x), u'(x), \dots, u^{(n-1)}(x)) \quad (*)$$

EQ. DI ORDINE n .

$$\underline{u}(x) = \begin{pmatrix} u_1(x) = u(x) \\ u_2(x) = u'(x) \\ u_3(x) = u''(x) \\ \vdots \\ u_m(x) = u^{(m-1)}(x) \end{pmatrix}$$

Jet di u .

$$\begin{cases} u_1'(x) = u_2(x) \\ u_2'(x) = u_3(x) \\ \vdots \\ u_{n-1}'(x) = u_n(x) \\ u_n'(x) = f(x, u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)) \end{cases}$$

SISTEMA DEL
I ORDINE
EQUIVALENTE
A (*)

ES SPAZIO DELLE FASI

$$u''(x) = -\sin(u(x))$$

$x = \text{tempo}$

$u = \text{angolo con la verticale}$

$$v(x) = u'(x)$$



$$\begin{cases} v'(x) = -\sin(u(x)) \\ u'(x) = v(x) \end{cases}$$

(u, v) vive nello spazio delle fasi

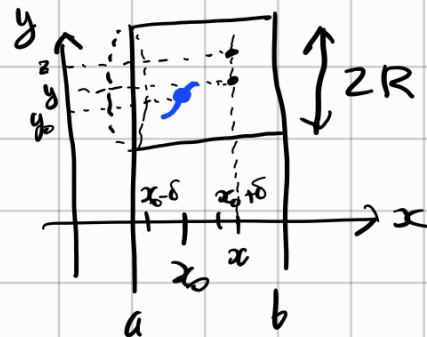


$$\boxed{\begin{cases} \underline{u}'(x) = \underline{f}(x, \underline{u}(x)) \\ \underline{u}(x_0) = \underline{y}_0 \end{cases}} \quad (PC)$$

Teorema (Cauchy-Lipschitz, esistenza e unicità locale)

Siano $x_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$, $a < b$ con $a \leq x_0 \leq b$,
 $R > 0$

$$K = \{ \underline{y} \in \mathbb{R}^n : |\underline{y} - \underline{y}_0| \leq R \} \subseteq \mathbb{R}^n$$



$f: [a, b] \times K \rightarrow \mathbb{R}^n$ è una
funzione tale che:

1. f continua

2. $\exists L > 0$ t.c. $\forall x \in [a, b] \forall y, z \in K$

$$|f(x, \underline{y}) - f(x, \underline{z})| \leq L |\underline{y} - \underline{z}|$$

Allora $\exists \delta > 0$ t.c. $\forall$ intervallo $I \subseteq [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \cap [a, b]$

$\exists!$ $\underline{u}: I \rightarrow K \subseteq \mathbb{R}^n$ che risolve il problema

di Cauchy:
$$\begin{cases} \underline{u}'(x) = f(x, \underline{u}(x)) & \forall x \in I \\ \underline{u}(x_0) = \underline{y}_0 \end{cases} \quad (PC) \quad (u \in C^1)$$

dim $\textcircled{P}$

1. si riscrive il problema in forma integrale
2. si applica il teorema del punto fisso

1. Una funzione $u \in C^1$ risolve il (PC) (problema di Cauchy)

se e solo se

$u \in C^0$ è risolto

$\textcircled{V}$

$$\underline{u}(x) = \underline{y}_0 + \int_{x_0}^x f(t, \underline{u}(t)) dt$$

(Forma integrale)

Infatti: se $u \in C^0$ e risolve $\textcircled{V}$

$\underline{f}(t, \underline{u}(t))$ è continua. (composizione di fn continue)
 $\underline{f}$ continua, $\underline{u}$ continua

Per il teorema fondamentale del calcolo

$\int_{x_0}^x \underline{f}(t, \underline{u}(t)) dt$ è derivabile e la derivata

è $\underline{f}(x, \underline{u}(x))$. dunque il lato destro di
(4) è di classe $C^1 \Rightarrow \underline{u} \in C^1$ e

$$\underline{u}'(x) = 0 + \underline{f}(x, \underline{u}(x))$$

inoltre $\underline{u}(x_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x_0} \underline{f}(t, \underline{u}(t)) dt = y_0$ ok

Viceversa se $\underline{u} \in C^1$ risolvere (PC):

$$\underline{u}'(x) = \underline{f}(x, \underline{u}(x))$$

integrando:

$$\int_{x_0}^x \underline{u}'(t) dt = \int_{x_0}^x \underline{f}(t, \underline{u}(t)) dt$$

$$\underline{u}(x) - \underline{u}(x_0) = \int_{x_0}^x \underline{f}(t, \underline{u}(t)) dt$$

$$\underline{u}(x_0) = y_0 \Rightarrow \underline{u} \text{ risolvere } \textcircled{*}$$

2. $\textcircled{*}$ è della forma $\underline{u} = T(\underline{u})$

$$T: C^0 \rightarrow C^1 \subseteq C^0$$

$$T(\underline{u})(x) = y_0 + \int_{x_0}^x \underline{f}(t, \underline{u}(t)) dt$$

$\textcircled{*}$ si scrive $\underline{u} = T(\underline{u})$.

devo identificare lo spazio di funzioni $X \subseteq C^0$
tale che

(a) $T: X \rightarrow X$

(b) T è una contrazione

$X = C^0(I, K)$ con I "abbastanza piccolo"

(a) Voglio fare in modo che se $u \in C^0(I, K)$
allora $T(u) \in C^0(I, K)$. $I \subseteq [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$

$u \in C^0(I, K)$ se $u(x) \in K \quad \forall x \in I$

$$|u(x) - y_0| \leq R$$

$$|T(u)(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^x f(t, u(t)) dt \right|$$

$$\leq \left| \int_{x_0}^x |f(t, u(t))| dt \right| \leq \dots$$

(Visto che f è continua su $[a, b] \times K$
 f è limitata! $\exists M, |f(x, y)| \leq M$)

$$\leq \left| \int_{x_0}^x M dt \right| = M |x - x_0| \leq M \cdot \delta$$

$$\stackrel{?}{\leq} R \quad \text{Vero se } \delta \leq \frac{R}{M}.$$

$$\text{se } \delta \leq \frac{R}{L} \quad T: X \rightarrow X.$$

⑥ T é uma contração?

$$d_{\infty}(T(u), T(v)) \stackrel{?}{\leq} L d_{\infty}(u, v)$$

$$\begin{aligned} |T(u)(x) - T(v)(x)| &= \left| \int_{x_0}^x f(t, u(t)) dt - \int_{x_0}^x f(t, v(t)) dt \right| \\ &\leq \left| \int_{x_0}^x |f(t, u(t)) - f(t, v(t))| dt \right| \end{aligned}$$

$$|f(t, y) - f(t, z)| \leq L |y - z|$$

$$\begin{aligned} &\leq \left| \int_{x_0}^x L |u(t) - v(t)| dt \right| \\ &\leq \left| \int_{x_0}^x L d_{\infty}(u, v) dt \right| \end{aligned}$$

$$\leq L d_{\infty}(u, v) |x - x_0| \leq L \delta d_{\infty}(u, v)$$

$$d_{\infty}(T(u), T(v)) = \sup_{x \in I} |T(u)(x) - T(v)(x)|$$

$$\leq L \delta d_{\infty}(u, v)$$

$$\text{se } \boxed{\delta < \frac{1}{L}}$$

T é uma contração.



Condizione di Lipschitz:

$$K = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - y_d| \leq R\}$$

$$\exists L: \forall x \in [a, b] \quad \forall y, z \in K: |f(x, y) - f(x, z)| \leq L |y - z|.$$

cerchiamo una condizione più semplice da verificare.

idea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$|f(y) - f(z)| \leq L |y - z|$$

$$\left| \frac{f(y) - f(z)}{y - z} \right| \leq L$$

Lagrange: se f è derivabile $\exists c \in (y, z)$ t.c.:

$$\frac{f(y) - f(z)}{y - z} = f'(c)$$

se f' è limitata: $|f'(x)| \leq L$

$$\text{allora } \left| \frac{f(y) - f(z)}{y - z} \right| \leq L$$

$$\Rightarrow |f(y) - f(z)| \leq L |y - z|.$$

Ora $f = f(x, y)$. Se $y \in \mathbb{R}$ ($n=1$)

si fa lo stesso: $|f(x, y) - f(x, z)| \leq L |y - z|$

$$\text{se } \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \leq L$$

se $\frac{\partial f}{\partial y}$ è continua allora

effettivamente è limitata.

Oss se $\frac{\partial f}{\partial y}$ è continua in $A \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$

f soddisfa le ipotesi del teorema

in qualunque cilindro $[a, b] \times K_R \subseteq A$.

In particolare se $f \in C^1$ il teorema si applica.

Esempio $u' = u^p$

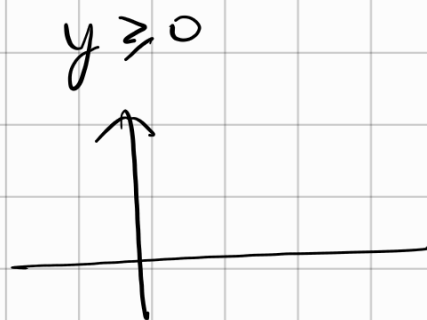
$p \in \mathbb{R}$

$$f(x, y) = y^p$$

se $p \geq 1$ $f \in C^1$

se $0 < p < 1$ es:

$$u' = \sqrt{u}$$



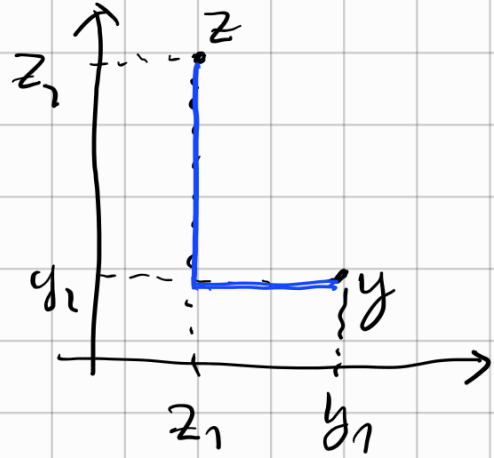
f non è C^1 . In effetti $u' = \sqrt{u}$ ha

esistenza ma non unicità della
soluzione.



Se $n > 1$.

$$y = (y_1, y_2) \quad z = (z_1, z_2)$$



$$|f_1(y) - f_1(z)|$$

$$\leq |f_1(y_1, y_2) - f_1(z_1, y_2)| + |f_1(z_1, y_2) - f_1(z_1, z_2)|$$

$$\leq \left| \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \right| |y_1 - z_1| + \left| \frac{\partial f_1}{\partial y_2} \right| |y_2 - z_2|$$

$$\leq 2 \left| \frac{\partial f_1}{\partial y} \right| |y - z|$$

$$|f(y) - f(z)| = \sqrt{|f_1(y) - f_1(z)|^2 + |f_2(y) - f_2(z)|^2}$$

$$\leq \sqrt{2} \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \sqrt{2} |y - z| \dots \text{ok!}$$