

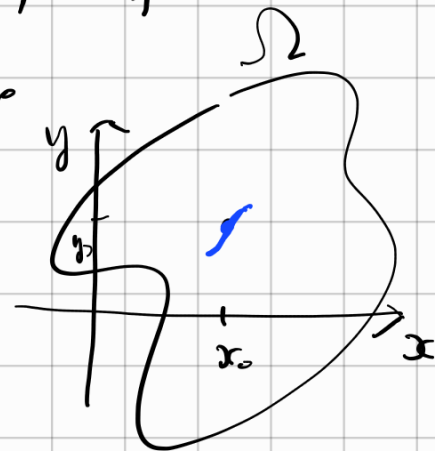
ANALISI MATEMATICA B

LEZIONE 61 - 2.3.2026

Problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'(x) = f(x, u(x)) \\ u(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Oss le soluzioni di una eq diff. (ordinaria) vanno cercate tra le funzioni definite in un intervallo



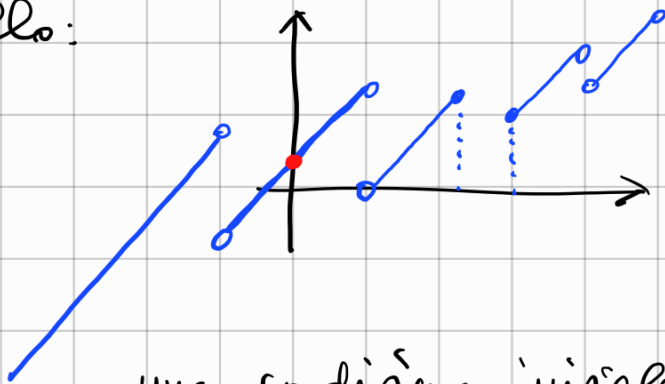
Es $u'(x) = 1$

$$f: \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

se $u: I \rightarrow \mathbb{R}$ con I intervallo

allora $u(x) = x + c$ perché $(u(x) - x)' = 0$
e le funzioni con derivata nulla sono costanti in ogni intervallo I .

ma esistono 1000 funzioni non definite su un intervallo:



una condizione iniziale $u(x_0) = y_0$ può determinare la soluzione solo nell'intervallo che contiene x_0 .

def $\underline{u}: I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, è una

soluzione nominale di una equazione differenziale

④ $u'(x) = f(x, u(x))$ o qualunque altra eq.

se non esiste un intervallo $J \supseteq I$, $J \neq I$
e una funzione $\tilde{u}: J \rightarrow \mathbb{R}^n$ con $\tilde{u} = u$ su I
tale che anche $\tilde{u}$ è soluzione della
stessa equazione (*).

Es
$$\begin{cases} u'(x) = \sqrt[3]{u} & (*) \\ u(0) = 1 & (**) \end{cases}$$

$$\begin{matrix} \nearrow \sqrt[3]{u} \\ \rightarrow u \end{matrix}$$



Risolvo:

Vorrei dividere per $\sqrt[3]{u}$.

Osservo che $u(x) \equiv 0$ è soluzione di (*)
ma non soddisfa (**)

($u(x) \equiv 0$ è definita su tutto $\mathbb{R}$
quindi è nominale)

Suppongo $u(x) \neq 0$ e divido:

$$\frac{u'(x)}{\sqrt[3]{u(x)}} = 1$$

|| su un intervallo
dove $u(x) \neq 0$

$$\int \frac{u'(x)}{\sqrt[3]{u(x)}} dx = \int 1 dx$$

$$\left[\int \frac{du}{\sqrt[3]{u}} \right]_{u=u(x)} = \frac{3}{2} \left[\sqrt[3]{u^2} \right]_{u=u(x)} = \frac{3}{2} \sqrt[3]{u^2(x)}$$

$$\frac{3}{2} \sqrt[3]{u^2(x)} = x + c \quad x_0 = -c$$

$$u^2(x) = \left(\frac{2}{3} (x - x_0) \right)^3 \Rightarrow \underline{x > x_0}$$

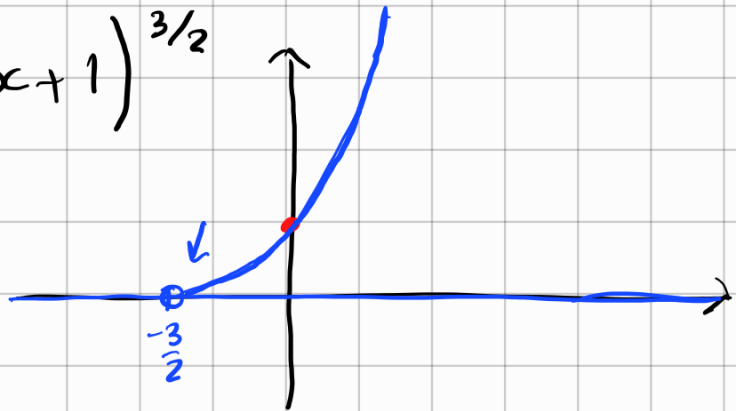
$$u(x) = \pm \sqrt{\frac{8}{27} |x - x_0|^3}$$

$$\textcircled{4*} u(0) = 1 \quad u(0) = \pm \sqrt{\frac{8}{27} (0 - x_0)^3} \stackrel{!}{=} 1$$

$$-\frac{8}{27} x_0^3 = 1 \quad x_0 = -\frac{3}{2}$$

$$u(x) = \pm \sqrt{\frac{8}{27} \left(x + \frac{3}{2} \right)^3} \quad x > -\frac{3}{2}$$

$$= \left(\frac{2}{3} x + 1 \right)^{3/2}$$



$$I = \left(-\frac{3}{2}, +\infty \right)$$

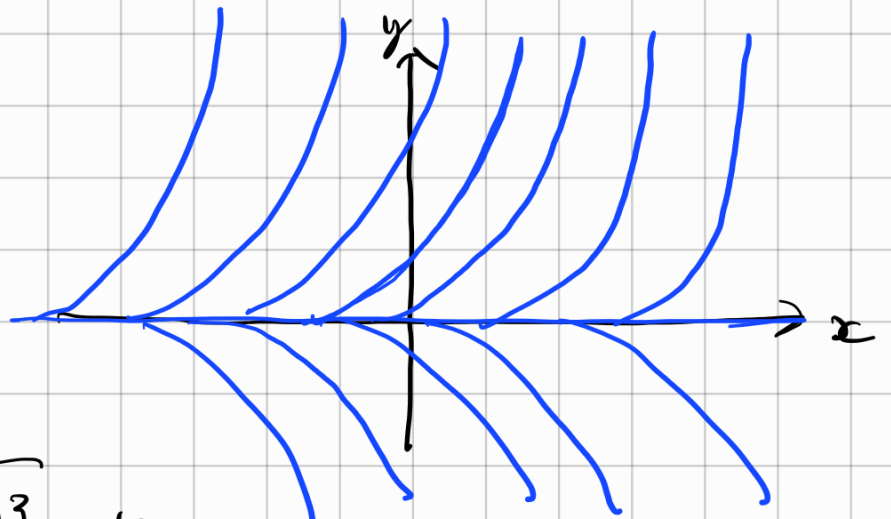
$u: I \rightarrow \mathbb{R}$ è monotona?

$$\parallel \tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x) & \text{per } x > -\frac{3}{2} \\ 0 & \text{per } x \leq -\frac{3}{2} \end{cases}$$

è ancora una soluzione! $\tilde{u}$ è monotona.

Trovare tutte le sol. numeriche di

$$u' = \sqrt[3]{u}.$$



$$u(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{\frac{8}{27}(x-x_0)^3} & \text{per } x > x_0 \\ 0 & \text{per } x \leq x_0 \end{cases}$$

Fissato $x_0 \in (-\infty, +\infty]$

sono tutte le sol. numeriche.

Ripasso separazione delle variabili

$$f(u(x)) u'(x) = g(x)$$

INFORMALMENTE

FORMALMENTE

$$f(u) \cdot \frac{du}{dx} = g(x)$$

$$\int f(u) du = \int g(x) dx$$

$$F(u) = G(x) + c$$

$$u = F^{-1}(G(x) + c)$$

$$\int f(u(x)) u'(x) dx = \int g(x) dx$$

$$\begin{cases} y = u(x) \\ dy = u'(x) dx \end{cases}$$

$$\left[\int f(y) dy \right]_{y=u(x)}$$

$$\left[F(y) \right]_{y=u(x)}$$

$$F(u(x))$$

$$F = \int f$$

$$G = \int g$$

Teorema (esistenza delle soluzioni massimali)

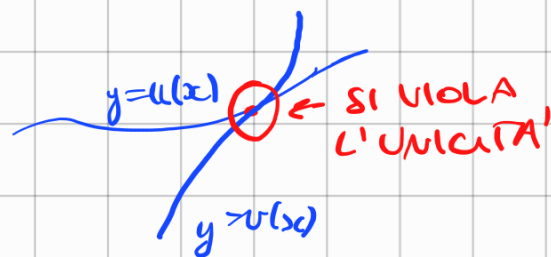
Le soluzioni massimali esistono.

Se l'equazione ha unicità locale
la soluzione massimale con un certo dato
iniziale $u(x) = y_0$ è unica.

} VEDI
APPUNTI

Teorema (separazione delle soluzioni)

Se c'è unicità (locale) delle soluzioni
due diverse soluzioni non si toccano mai



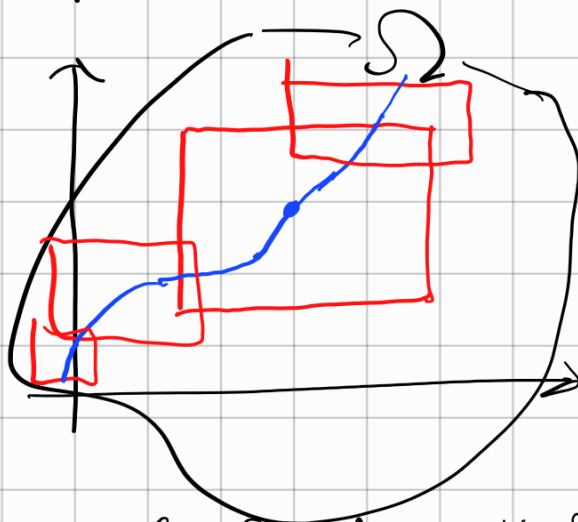
Teorema (Fuga dai compatti)

Se siamo nelle ipotesi del teorema di esistenza e unicità
locale per l'equazione:

$$u'(x) = f(x, u(x))$$

con $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$

Allora il grafico di
una soluzione massimale
esce da ogni compatto
contenuto in Ω .



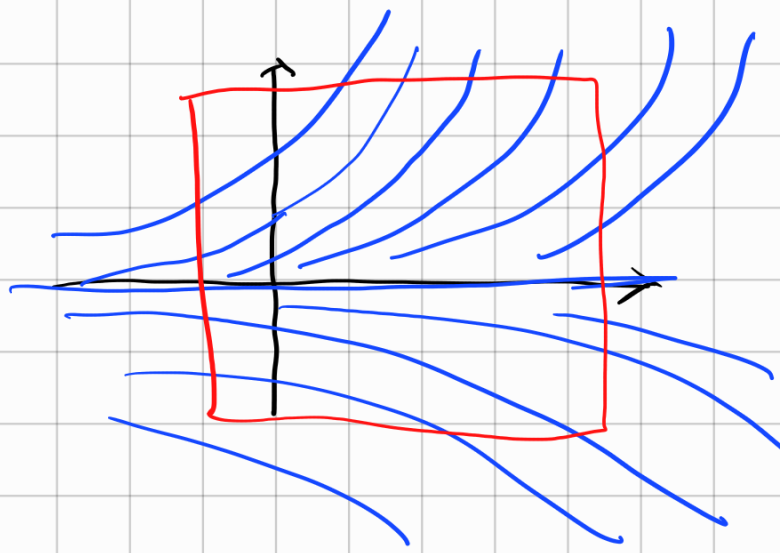
Intuitivamente "la soluzione tocca la frontiera di Ω ".

Esempio 1 $u'(x) = u(x)$

$$u(x) = C \cdot e^x$$

$$\Omega = \mathbb{R}^2$$

(soluzioni GLOBALI)



Esempio 2

$$u'(x) = u^2(x)$$

$$u(x) = 0$$

$$\frac{u'}{u^2} = 1$$

$$-\frac{1}{u} = x - x_0$$

$$u(x) = -\frac{1}{x - x_0}$$

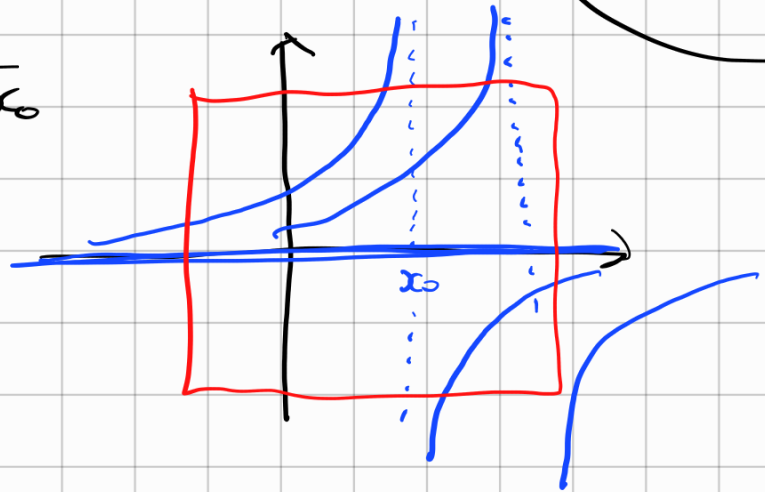
$$\Omega = \mathbb{R}^2$$

ha $\exists!$ locale

risolto $f(x,y) = y^2 \in C^1$.

$\Downarrow$
localmente
lipschitz

$\Downarrow$
 $\exists!$
locale



In questo caso le

soluzioni non sono tutte definite su tutto $\mathbb{R}$

Si dice che (in questo caso) le soluzioni

non sono GLOBALI.

Def se $f: I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione
 di $u' = f(x, u)$ è globale se
 è definita su tutto I .

Esempio $u'(x) = \frac{1}{x - u(x)}$ $f(x, y) = \frac{1}{xy}$
 $xy \neq 0$

$$uu' = \frac{1}{x}$$

$$\int u \, du = \int \frac{1}{x} \, dx$$

$$\frac{u^2}{2} = \ln|x| + c$$

deve essere $\ln|x| + c > 0$ per $\frac{u^2}{2} > 0$

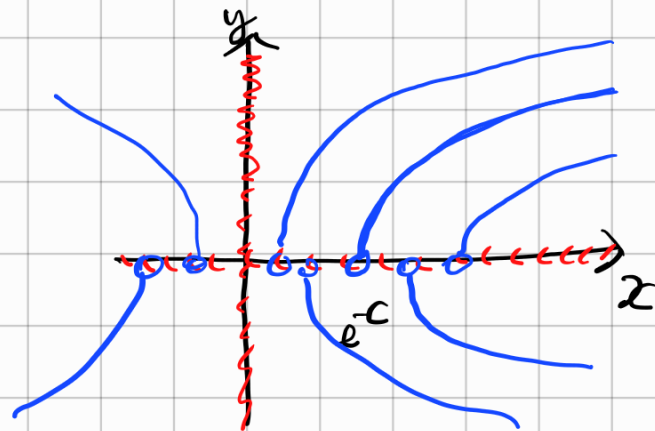
$$\ln|x| > -c$$

$$|x| > e^{-c}$$

$$\begin{aligned} &\swarrow x \in (e^{-c}, +\infty) \\ &\nwarrow x \in (-\infty, -e^{-c}) \end{aligned}$$

$$u^2 = 2(\ln|x| + c)$$

$$u = \pm \sqrt{2(\ln|x| + c)}$$



Teorema (esistenza globale)

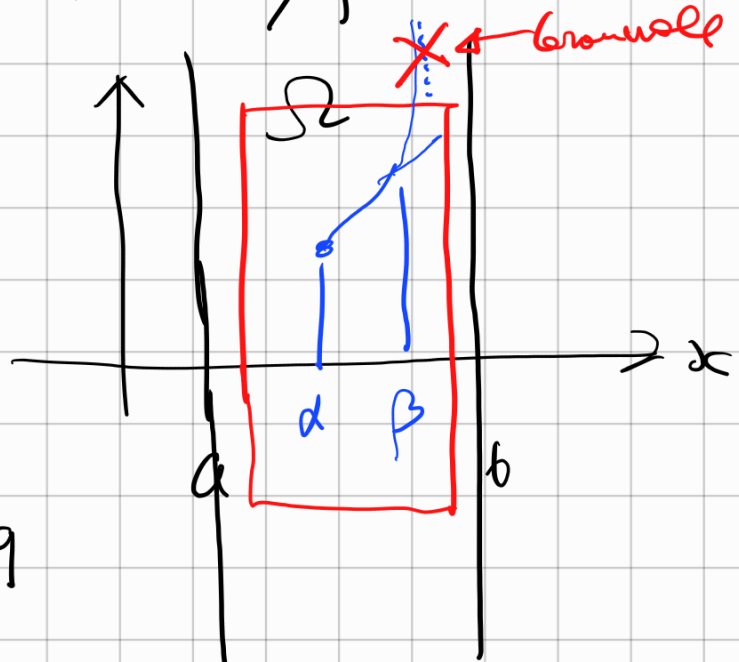
Sia $I = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo (anche illimitato), $\Omega = (a, b) \times \mathbb{R}$, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Supponiamo esistano

$m, q \in \mathbb{R}$ tali che

$$\forall x, y \in \Omega$$

$$|f(x, y)| \leq m|y| + q$$



Allora le soluzioni massimali di

$$\underline{u}'(x) = f(x, \underline{u}(x))$$

sono globali (cioè sono definite su tutto (a, b)).

Basta il lemma:

Lemma (Gronwall)

$u: [d, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^n$
di classe C^1 .

$$\text{Se } |u'(t)| \leq m|u(t)| + q \quad \forall t \in [d, \beta)$$

allora $\left[\ln(1+u^2) \right]_a^x \leq (2m+q)(x-a)$

dim (lemma)

$$\left[\ln(1+|u(t)|^2) \right]_a^x = \int_a^x \frac{2u(t) \cdot u'(t)}{1+|u(t)|^2} dt$$

$$\leq 2 \int_a^x \frac{|u(t)| \cdot |u'(t)|}{1+|u(t)|^2} dt \stackrel{\text{type}}{\leq} 2 \int_a^x \frac{|u(t)| \cdot (m|u(t)|+q)}{1+|u(t)|^2} dt$$

$$\leq 2 \int_a^x \left(\frac{m|u|^2}{1+|u|^2} + \frac{q \cdot |u|}{1+|u|^2} \right) dt$$

$$\leq 2 \int_a^x \left(m + \frac{q}{2} \right) dt$$

$$= (2m+q)(x-a).$$

□

In particolare

se $\beta < +\infty$ u è limitata

$$\frac{s}{1+s^2} \leq \frac{1}{2}$$

$$0 \leq (s-1)^2 = s^2 - 2s + 1$$

$$2s \leq 1 + s^2$$