

6 MAR 2026 - Lezione ...

EQ. DIFF. A COEFF. COSTANTI

CASO OMogeneo

$$u^{(n)} + a_{n-1} u^{(n-1)} + \dots + a_1 u' + a_0 u = 0 \quad (E0)$$

$$a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K} \quad \text{con } \mathbb{K} = \begin{cases} \mathbb{R} \\ \mathbb{C} \end{cases}$$

Esempi

$$u'' - u = 0 \quad (*)$$

$$u(x) = e^{\lambda x} \rightarrow (*)$$

$$\lambda^2 e^{\lambda x} - e^{\lambda x} = 0$$

$$(\lambda^2 - 1) e^{\lambda x} = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 1$$

$\nearrow e^x$ e $\nearrow e^{-x}$ sono soluzioni di (*)
 $\text{Ker}(D-I)$ $\text{Ker}(D+I)$ sono lin. indipendenti

Se u è una soluz. di (*) $\Rightarrow u(x) = A e^x + B e^{-x}$
con $A, B \in \mathbb{R}$

Cosa potrebbe andare storto?

$$u'' + u = 0 \quad (**)$$

$$\leftarrow (D^2 + I) u = 0$$

$$(\lambda^2 + 1) e^{\lambda x} = 0 \rightsquigarrow \lambda = \pm i$$

e^{ix} e e^{-ix} sono soluzioni di (**) e sono linearmente indipendenti

$$\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \cos x$$

$$\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \sin x$$

sono ancora due sol di (**)
sono linearmente indipendenti

le soluzioni reali di (**) $u(x) = A \cos x + B \sin x$
 $A, B \in \mathbb{R}$

$$(***) \quad u'' - 2u' + u = 0 \leftarrow (D^2 - 2D + I)u = 0$$

$$(\lambda^2 - 2\lambda + 1)e^{\lambda x} = 0$$

$$\downarrow$$

$$(\lambda - 1)^2$$

e^x è sol
dov'è l'altra
???

Cosa succede se metto $u(x) = e^{\lambda x}$ in (E0)

$$\underbrace{(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0)}_{P(\lambda)} e^{\lambda x} = 0$$

$P(\lambda)$ polinomio caratteristico dell'eq (E0)

$$C^\infty \rightarrow C^\infty$$

$$D: u \mapsto Du \doteq u'$$

$$D^n D^m = D^m D^n = D^{n+m}$$

$$P(D) = (D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \dots + a_1D + a_0)$$

$$(E0) \quad P(D) \cdot u = 0$$

Se lavoriamo su $\mathbb{C}$

$$P(\lambda) = \prod_{i=1}^r (\lambda - \lambda_i)^{n_i}$$

λ_i radice di P
con mult n_i

$$(D - \lambda_1)^{n_1} \cdot \dots \cdot (D - \lambda_r)^{n_r} u = 0$$

$$\sum_{i=1}^r n_i = n$$

Esempio $\otimes$

$$u'' - u = 0$$

$$(D^2 - I)u = 0$$

$$P(D)u = 0$$

Commutano!

$$(D+I)(D-I)u = 0$$

$$V = \text{Ker}(D+I) \oplus \text{Ker}(D-I)$$

$$\downarrow \text{span } e^{-x}$$

$$\text{span } e^x$$

Esempio
(~~xxx~~)

$$u'' - 2u' + u = 0$$

$$(D^2 - 2D + I)u = 0$$

$$P(D)u = 0$$

$$(D-I)^2 u = 0$$

$$V = \text{Ker}(D-I)^2 = ?$$

In generale;

Q: Chi è $\text{Ker}(D - \mu I)^m$? $\mu \in \mathbb{C}$
 $m \in \mathbb{N}$

Caso facile

$$\mu = 0$$

$$\text{Ker}(D^m)$$

$$D^m u = 0$$

$$u^{(m)} = 0$$

$$V = \{p \in \mathbb{C}[x] : \deg(p) < m\}$$

$\hookrightarrow$ sp. di dimensione m

$$\mu \in \mathbb{C}$$

OPERATORE DI MOLTIPLICAZIONE E_μ

$$E_\mu : u \mapsto u e^{\mu x}$$

operatore
invertibile

$$E_\mu E_{-\mu} = \hat{I} = E_{-\mu} E_\mu$$

$$(D - \mu)^m = E_\mu D^m E_{-\mu}$$

$$\forall m \geq 0$$

$$u \xrightarrow{E_{-\mu}} e^{-\mu x} u \xrightarrow{D} -\mu e^{-\mu x} u + e^{-\mu x} u' \xrightarrow{E_\mu} u' - \mu u$$

$$(D - \mu I)u$$

$$(D - \mu)^2 = (E_\mu D E_{-\mu}) (E_\mu D E_{-\mu})$$

si semplificano

COROLLARIO: $\text{Ker} (D - \mu)^m = \left\{ p(x) e^{\mu x} \mid p \in \mathbb{C}[x], \deg p < m \right\}$

$$(D - \mu)^m u = 0 \iff E_\mu D^m E_{-\mu} u = 0 \iff D^m (E_{-\mu} u) = 0$$

invertibile

$$E_{-\mu} u \in \text{Ker}(D^m)$$

$$e^{-\mu x} u = p(x)$$

$$u = p(x) e^{\mu x}$$

Le soluzioni di
 $u'' - 2u' + u = 0$

$$P(\lambda) = (D - I)^2$$

$$u(x) = A e^x + B x e^x = (A + Bx) e^x$$

↑
generico pol di grado ≤ 2

$$V_{\mu, m} \stackrel{*}{=} \text{Ker} (D - \mu)^m = \{u = e^{\mu x} p(x) \mid p \in \mathbb{C}[x], \deg(p) < m\}$$

$$D - \lambda : V_{\mu, m} \longrightarrow V_{\mu, m}$$

$$(D - \lambda) [p(x) e^{\mu x}] = ((D - \mu) + (\mu - \lambda)) [p(x) e^{\mu x}]$$

$$(D - \mu) [p(x) e^{\mu x}] = p'(x) e^{\mu x} \quad \Rightarrow \quad (p'(x) + (\mu - \lambda)p(x)) e^{\mu x}$$

$$\uparrow$$

$$\text{se } \lambda \neq \mu \quad p' + (\mu - \lambda)p \neq 0$$

a meno che $p \equiv 0$

COR :

$$D - \lambda \text{ è invertibile su } V_{\mu, m} \Leftrightarrow \lambda \neq \mu$$

$$P(D) = (D - \lambda_1)^{m_1} \cdots (D - \lambda_r)^{m_r}$$

OSS: se $v \in V_{\lambda_h, m_h} (= \text{Ker} (D - \lambda_h)^{m_h})$ per $1 \leq h \leq r$

allora $P(D) v = 0$ (cioè v è sol di (E_0))

Esempio: $P(D) = D^2 - I = (D + I)(D - I) = (D - I)(D + I)$

$v \in \text{Ker}(D + I) \Rightarrow v$ è soluzione

$$P(D)v = 0$$

Per linearità, se $v_h \in \text{Ker}(D - \lambda_h)^{m_h}$
 $\forall h \in \{1, \dots, r\}$

anche $\sum_{h=1}^r v_h$ è soluzione

$$P(D) \left[\sum_{h=1}^r v_h \right] = \sum_{h=1}^r P(D) v_h = 0$$

Spazio delle
soluzioni di (EO)

$$V \supset \sum_{h=1}^r V_{\lambda_h, m_h}$$

$\dim V = n$

$$\dim(V_{\lambda_h, m_h}) = m_h$$

$$\sum_{h=1}^r m_h = 1$$

$$\dim \left(\sum_{h=1}^r V_{\lambda_h, m_h} \right) = \sum_{h=1}^r \dim(V_{\lambda_h, m_h})$$

è vera se -
la somma è diretta
ovvero se

$$\sum_{h=1}^r v_h = 0 \Rightarrow v_h = 0 \quad \forall h$$

Fisso $k \in \{1, \dots, r\}$

$$\hat{P}_k(D) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^r (D - \lambda_i)^{m_i}$$

$$\hat{P}_k(D) \left[\sum_{h=1}^r v_h \right] = \sum_{h=1}^r \hat{P}_k(D) v_h = \hat{P}_k(D) v_k$$

$\otimes \parallel$
0

$$\text{se } k \neq h \quad \hat{P}_k(D) v_h = 0$$

$$\hat{P}_k(D): V_{\lambda_k, m_k} \xrightarrow{\sim} V_{\lambda_k, m_k}$$

$$\hat{P}_k(D) v_k = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$v_k = 0$$

$\forall k$ fissato $1 \leq k \leq r$

$$\sum_{h=1}^r v_h = 0 \Rightarrow v_k = 0$$

$$\sum_{h=1}^r v_h = 0 \Rightarrow v_h = 0 \quad \forall h \in \{1, \dots, r\}$$

Quindi $V = \bigoplus_{h=1}^r V_{\lambda_h, n_h}$

spazio
delle soluzioni
di (E0)

$$\nwarrow \text{Ker } (D - \lambda_h)^{n_h}$$

$$\{ p(x) e^{\lambda_h x} \mid \deg p < n_h \}$$

METODO DI SIMILARITÀ

$$P(D) u = f \quad (\text{E.N.O.})$$

$$f = 0 \text{ ho (E0)}$$

Le soluzioni di (E.N.O) sono del tipo

$$u = u_p + u_{om} \quad \text{dove } u_p \text{ è una sol di (E.N.O) particolare}$$

$$\text{e } u_{om} \text{ è sol di (E0)}$$

Come si trova una sol. particolare di (E.N.O)

Caso in cui $f(x) = q(x) e^{\mu_0 x}$ con $q \in \mathbb{C}[x]$
 $\deg(q) < m$

(i) Se $P(\mu_0) \neq 0$

(cioè μ_0 NON è
radice del
polo nominale
caratteristico)

$$P(D): V_{\mu_0, m} \xrightarrow{\sim} V_{\mu_0, m}$$

$P(D)$ è iniettivo (e quindi sur.)
 $V_{\mu_0, m}$

$$\forall f \in V_{\mu_0, m} \exists! u \in V_{\mu_0, m}$$

$$P(D)u = f$$

e per trovarla basta risolvere un
sistema lineare

(ii) $P(\lambda) = (\lambda - \mu_0)^k \hat{P}(\lambda)$ con $\hat{P}(\mu_0) \neq 0$

(caso in cui μ_0 è radice di P con moltep. k)

$$\text{Poi } W = \{u = x^k v(x) \mid v(x) \in V_{\mu_0, m}\}$$

FATTO $P(D): W \xrightarrow{\sim} V_{\mu_0, m}$ ~~★~~

$$P(D) = \hat{P}(D) (D - \mu_0)^k$$

$$\hat{P}(D) \downarrow (D - \mu_0)^k [x^k p(x) e^{\mu_0 x}] = \hat{P}(D) \left[\underbrace{D^k (x^k p(x))}_{=0} e^{\mu_0 x} \right]$$

$$D^k (x^k p(x)) = 0 \iff p = 0$$

$$W \xrightarrow[\sim]{(D - \mu_0)^k} V_{\mu_0, m} \xrightarrow[\sim]{\hat{P}(D)} V_{\mu_0, m}$$

Mappe lineari
iniettive tra
spazi di
dimensione
 m

$$\textcircled{\star} \quad \forall f \in V_{\mu_0, m} \quad \exists! u \in W$$

$$\text{tale } P(D)u = f$$

e si calcola risolvendo
un sistema
lineare

Esercizio: Risolvere l'equazione
(a) trovare una sol particolare della non omogenea
(b) trovare tutte le sol dell'omogenea associata

$$u'''' + 2u'' + u = \sin x \quad (E\mathbb{R})$$

Sugg:

$$\left[\begin{array}{l} w'''' + 2w'' + w = \textcircled{e^{ix}} \text{ f.o. } (E\mathbb{C}) \\ \text{Se } w \text{ è sol di } (E\mathbb{C}) \Rightarrow \text{Im } w \text{ è sol di } (E\mathbb{R}) \end{array} \right]$$

Cercherò una sol particolare
di (EF) della
forme $\rightarrow$

$$w(x) = x^2 A e^{i x}$$

$$\begin{cases} f(x) = q(x) e^{\mu_0 x} \\ \int_0^{\infty} q(x) dx = 1 \\ \mu_0 = i \end{cases}$$

$$D^4 + 2D^2 + I = (D^2 + I)^2$$

$$\parallel$$

$$(D^2 + I)^2$$

$$\parallel$$

$$(D - iI)^2 (D + iI)^2$$

$$\mu_0 = i$$

Calcolo per caso

$$u'' - u = e^x + e^{2x}$$

suff: $u = v + w$ con

$$\begin{cases} v'' - v = e^x \\ w'' - w = e^{2x} \end{cases}$$

$$u'' + u = \sin \omega x$$

Determinare le
soluzioni
al variare di ω