

ANALISI MATEMATICA B

LEZIONE 64 - 11.3.2026

VISTO:

Lineari omogenee a coefficienti costanti (polinomio associato)

Soluzioni particolari delle non-omogenee

GIÀ VISTO • metodo di similarità

DA FARE • metodo della variazione delle costanti.

Esempi

$$u'' + u = 0 \quad (\text{oscillatore armonico})$$

polinomio associato: $P(\lambda) = \lambda^2 + 1 = (\lambda + i)(\lambda - i)$

$$e^{\lambda x}: \quad \text{span}_{\mathbb{C}} \{e^{ix}, e^{-ix}\} = \text{span}_{\mathbb{C}} \{\cos x, \sin x\}$$

$$\text{In generale } \text{span}_{\mathbb{C}} \{e^{(d+i\beta)x}, e^{(d-i\beta)x}\} = \text{span}_{\mathbb{C}} \{e^{dx} \cos \beta x, e^{dx} \sin \beta x\}$$

Le soluzioni **REALI** sono $\text{span}_{\mathbb{R}} \{e^{dx} \cos \beta x, e^{dx} \sin \beta x\}$

Se $u_1, \dots, u_n$ sono funzioni (a valori) reali, indipendenti:

$$\text{e se } u = \sum_{k=1}^n c_k u_k \quad c_k \in \mathbb{C}$$

$$u(x) \in \mathbb{R} \quad \forall x \Leftrightarrow c_k \in \mathbb{R}.$$

Inferiti:

$$\bar{u}(x) = \sum_{k=1}^n \bar{c}_k \cdot \bar{u}_k(x)$$

$$u(x) = \sum_{k=1}^n \bar{c}_k u_k(x)$$

$$\text{ma } u(x) = \sum_{k=1}^n c_k u_k(x)$$

$$\Rightarrow 0 = \sum_{k=1}^n (\bar{c}_k - c_k) u_k$$

$\uparrow$
indipendenti

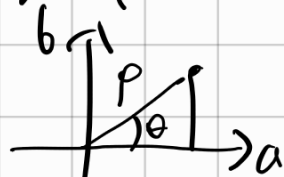
$$\begin{array}{c} c_k \in \mathbb{R}. \\ \uparrow \\ \bar{c}_k - c_k = 0 \\ \uparrow \end{array}$$

le soluzioni di $u'' + u = 0$
reali

$$u(x) = a \cos x + b \sin x \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R}$$

si può anche scrivere così:

$$\begin{cases} a = p \cos \theta \\ b = p \sin \theta \end{cases} \Rightarrow u(x) = p \cos \theta \cos x + p \sin \theta \sin x \\ = p \cdot \cos(x - \theta)$$



con $p \geq 0, \theta \in [0, 2\pi)$

Oscillatore smorzato

$$u'' + 2\beta u' + u = 0$$

↑ attrito

↙ ω_0^2

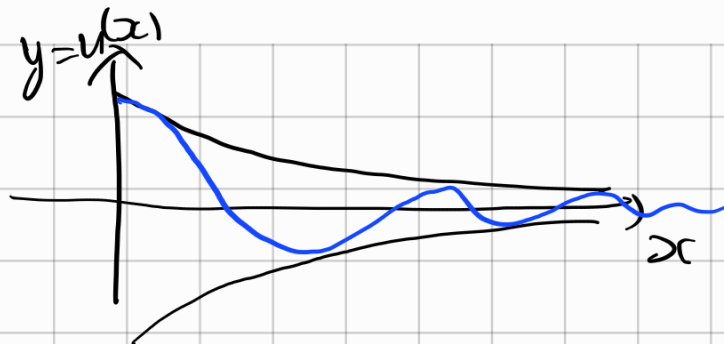
$$P(\lambda) = \lambda^2 + 2\beta \lambda + 1 \quad \beta > 0$$

$$\lambda^2 + 2\beta \lambda + 1 = 0$$

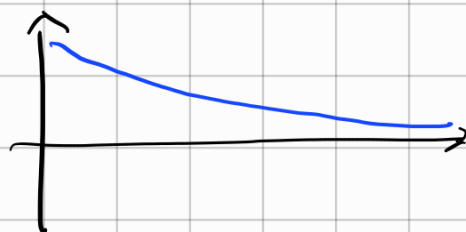
$$\lambda_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 1}$$

$$\textcircled{1} \quad 0 \leq \beta < 1 \quad \lambda_{1,2} = -\beta \pm i \sqrt{1 - \beta^2}$$

$$\begin{aligned} u(x) &= c_1 \cdot e^{-\beta x} \cos(\sqrt{1 - \beta^2} x) + c_2 e^{-\beta x} \sin(\sqrt{1 - \beta^2} x) \\ &= p e^{-\beta x} \cos(\sqrt{1 - \beta^2} (x - x_0)) \end{aligned}$$



② $\beta > 1$ $\lambda_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 1} \in \mathbb{R}$
 $\lambda_{1,2} < 0$
 $u(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$

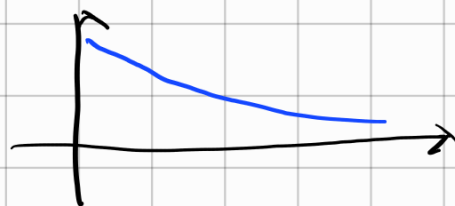


② $\beta = 1$ (caso critico)

$$\lambda_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{0} = -\beta = -1$$

$$u(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}$$

$$= (c_1 + c_2 x) e^{-x}$$



oscillatore forzato

$$u''(x) + u(x) = \sin(\omega x)$$

Forza esterna
con pulsazione ω .

TUTTE LE SOL.

EQ. OMOGENEA:

$$u'' + u = 0$$

$$u(x) = \rho \cos(x - x_0)$$

UNA SOL.

EQ. NON OMOGENEA: $u'' + u = \sin(\omega x)$ (*)

metodo di similarità

$$\sin(\omega x) = \frac{e^{i\omega x} - e^{-i\omega x}}{2i}$$

PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE

$$\left. \begin{array}{l} \textcircled{1} L u_1 = f_1 \\ \textcircled{2} L u_2 = f_2 \end{array} \right\} \Rightarrow L(u_1 + u_2) = f_1 + f_2 \quad \textcircled{3}$$

Se si risolvono separatamente $\textcircled{1}$ e $\textcircled{2}$

Si risolve $\textcircled{3}$

Quindi se $f = \sin \omega x$ se $\omega \neq 1$
 $P(\omega) \neq 0$

cerco una soluzione del tipo:

$$u_p(x) = a \cdot \cos(\omega x) + b \sin(\omega x)$$

$$u_p'(x) = -a\omega \sin(\omega x) + b\omega \cos(\omega x)$$

$$u_p''(x) = -a\omega^2 \cos(\omega x) - b\omega^2 \sin(\omega x)$$

DEVE ESSERE SOLUZIONE:

$$u_p''(x) + u_p(x) = a(1-\omega^2) \cos \omega x + b(1-\omega^2) \sin \omega x$$

$$\dot{1} = \sin(\omega x) \quad (*)$$

$$\begin{cases} a(1-\omega^2) = 0 \\ b(1-\omega^2) = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} a = 0 \\ b = \frac{1}{1-\omega^2} \end{cases}$$

$$u_p(x) = \frac{1}{1-\omega^2} \sin(\omega x)$$

Tutte le soluzioni sono:

$$u(x) = p \cos(x-x_0) + \frac{1}{1-\omega^2} \sin(\omega x)$$

se $\omega \rightarrow 1$ si crea una **RISONANZA**

Caso $\omega = 1$

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 1$$

L'OMOGENEITA' E' LA STESSA

MA LA SOL PARTICOLARE HA $\mu = i\omega$
UNA FORMA DIVERSA PERCHE' $P(i\omega) = 0$

$$u_p(x) = ax \cos x + b x \sin x$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{in generale} \quad x^m q(x) e^{\mu x} \\ \text{se } f(x) = Q(x) e^{\mu x} \\ \text{e } m = \text{multiplicità} \\ \text{di } \mu \text{ come} \\ \text{radice di } P \end{array} \right]$$

$$u_y'(x) = a \cos x + b \sin x - ax \sin x + bx \cos x$$

$$u_y''(x) = -a \sin x + b \cos x - a \sin x + b \cos x$$

$$-ax \cos x - bx \sin x$$

$$= -2a \sin x + 2b \cos x - ax \cos x - bx \sin x$$

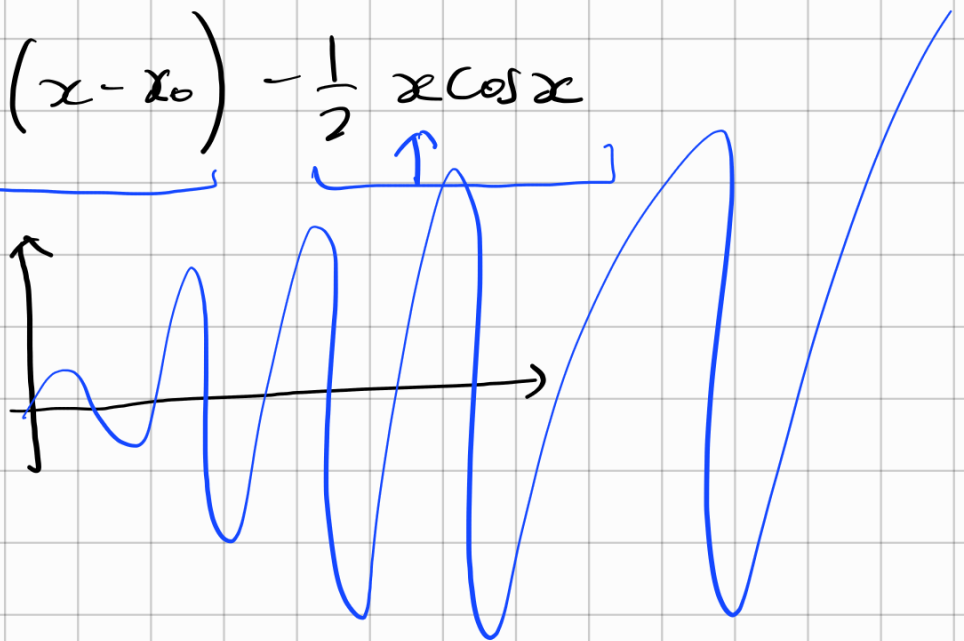
$$u_y'' + u_y = -2a \sin x + 2b \cos x \stackrel{!}{=} \sin x$$

$$\begin{cases} -2a = 1 \\ 2b = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = 0 \end{cases}$$

$$u_y(x) = -\frac{1}{2} x \cos x \quad \bar{e} \text{ sol. particolare}$$

Tutte le soluzioni:

$$u(x) = \underbrace{p \cos(x - x_0)}_{\text{homogeneous}} - \underbrace{\frac{1}{2} x \cos x}_{\text{particular}}$$



Esercizio 1

Se u_ω è la soluzione di

$$\begin{cases} u'' + u = \sin(\omega x) \\ u(0) = 0 \\ u'(0) = 1 \end{cases}$$

dimostriamo che per $\omega \rightarrow 1$

$u_\omega \rightrightarrows u_1$ su ogni intervallo
limitato.
↑
convergenza
uniforme

1) FARE L'ESPERIMENTO NUMERICO
(disegnare i grafici)



Cosa facciamo se $Lu = f$ e f non
è della forma $\sum q_k(x) e^{\lambda_k x}$?

USIAMO IL METODO SEGUENTE:

VARIAZIONE DELLE COSTANTI.

$$u^{(n)} + a_{n-1}(x) u^{(n-1)} + \dots + a_1(x) u'(x) + a_0(x) u(x) = f(x)$$

↑ generica eq. LINEARE NON OMogenea
DI ORDINE n
(IN FORMA NORMALE)

Supponiamo di avere tutte le soluzioni della omogenea:

$$u(x) = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x) + \dots + c_n u_n(x) \quad c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$$

con $u_1, \dots, u_n$ soluzioni indipendenti (della omogenea)

Allora cerco una soluzione particolare della forma:

$$u(x) = c_1(x) u_1(x) + \dots + c_n(x) u_n(x)$$

$$\begin{cases} u'(x) = c_1(x) u_1'(x) + \dots + c_n(x) u_n'(x) \\ u''(x) = c_1(x) u_1''(x) + \dots + c_n(x) u_n''(x) \\ \vdots \\ u^{(n-1)}(x) = c_1(x) u_1^{(n-1)}(x) + \dots + c_n(x) u_n^{(n-1)}(x) \\ u^{(n)}(x) = c_1(x) u_1^{(n)}(x) + \dots + c_n(x) u_n^{(n)}(x) \end{cases} \begin{cases} c_1'(x) u_1(x) + \dots + c_n'(x) u_n(x) = 0 \\ c_1'(x) u_1'(x) + \dots + c_n'(x) u_n'(x) = 0 \\ \vdots \\ c_1'(x) u_1^{(n-2)}(x) + \dots + c_n'(x) u_n^{(n-2)}(x) = 0 \\ c_1'(x) u_1^{(n-1)}(x) + \dots + c_n'(x) u_n^{(n-1)}(x) = f \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 a_0(x) \cdot u(x) &= c_1 a_0 u_1 + c_2 a_0 u_2 \\
 + a_1(x) \cdot u'(x) &= c_1 a_1 u_1' + c_2 a_1 u_2' \\
 &\vdots \\
 + a_{n-1}(x) u^{(n-1)}(x) &= c_1 a_{n-1} u_1^{(n-1)} + c_2 a_{n-1} u_2^{(n-1)} \\
 + u^{(n)}(x) &= c_1 u_1^{(n)} + c_2 u_2^{(n)}
 \end{aligned}$$

$$L u = 0 + 0 + \dots + 0 + f$$

$$L u = f \quad \text{se}$$

$c_1, \dots, c_n$ unknowns;

$$W(x) \cdot \begin{bmatrix} c_1'(x) \\ \vdots \\ c_n'(x) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(x) \end{pmatrix}$$

↑
matrix whose size is $n \times n$

$$W(x) = \begin{pmatrix} u_1(x) & \dots & u_n(x) \\ u_1'(x) & & u_n'(x) \\ \vdots & & \vdots \\ u_1^{(n-1)}(x) & & u_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

Se $\det W(x) \neq 0$
theorem

$$\begin{bmatrix} c_1'(x) \\ \vdots \\ c_n'(x) \end{bmatrix} = W(x)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(x) \end{pmatrix}$$

$$c_k(x) = \int c_k'(x) dx.$$

Per caso 

$$u'' + u = \sin wx$$

risolvere con questo metodo!