

13 mar 2026 - Lezione...

# METODO DI VARIAZIONE DELLE COSTANTI (RELOADED) x Sistemi del 1° ordine

$$u' = A(x)u + b(x) \quad (S_b)$$

$$\begin{cases} I \subseteq \mathbb{R} \text{ intervallo} \\ A: I \rightarrow M(n \times n) \\ b: I \rightarrow \mathbb{R}^n \end{cases}$$

(un'eq lineare di ordine  $n$   
può essere ricondotta a un sistema del tipo  $(S_b)$ )

IDEA: Suppongo di conoscere  $W_1, \dots, W_n$   
sol di  $(S_0)$  LIN. INDIPENDENTI  
 $\hookrightarrow (S_b)$  con dato  $b \equiv 0$

Cerco soluzioni di  $(S_b)$  nella forma

$$u(x) = c_1(x)W_1(x) + \dots + c_n(x)W_n(x)$$

$$\boxed{u(x) = W(x) \cdot C(x)} \quad \left\{ \begin{array}{l} W \doteq (W_1, \dots, W_n) \\ C(x) \doteq \begin{pmatrix} c_1(x) \\ \vdots \\ c_n(x) \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

Forma compatta  $\rightarrow$

$$u' = W' C + W C'$$

$\nwarrow$   
 $AW$

$$u' = A \underbrace{WC}_u + WC'$$

$w_i$  sol di  $(S_0)$   
 $\nwarrow$   
 $W' \doteq (W'_1, \dots, W'_n) = (AW_1, \dots, AW_n)$

$$W' = A \cdot W$$

$$u' = Au + b(x) \iff W C' = b(x)$$

$$\iff C' = \underbrace{[W(x)]^{-1}}_{\substack{\text{matrice} \\ \text{inversa} \\ \text{di } W(x)}} \cdot b(x)$$

$$C'(x) = \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ \vdots \\ c_n'(x) \end{pmatrix}$$

$\nwarrow$  in effetti  $W(x)$  è sempre invertibile

Nel caso delle EQUAZIONI di ordine  $n$  si parte da una base  $u_1, \dots, u_n$  di soluzioni del sistema omogeneo e si prende

$$W_i = \begin{pmatrix} u_i \\ u_i' \\ \vdots \\ u_i^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

$$I \subseteq \mathbb{R}$$

$$a_j: I \rightarrow \mathbb{R}$$

Proprietà: Data un'equazione

$$\underbrace{u^{(n)} + a_{n-1}(x) u^{(n-1)} + \dots + a_1(x) u' + a_0(x) u}_{Lu} = f(x)$$

$V$  spazio delle soluzioni di  $Lu = 0$

Allora  $\forall x_0 \in I$

$$J_{x_0}: V \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$u \longmapsto \begin{pmatrix} u(x_0) \\ u'(x_0) \\ \vdots \\ u^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix}$$

è biettiva & lineare

Se  $u_1, \dots, u_n$  sol di  $Lu = 0$

$$\longrightarrow W(x) = \begin{pmatrix} u_1(x) & \dots & u_n(x) \\ u_1'(x) & \dots & u_n'(x) \\ \vdots & & \vdots \\ u_1^{(n-1)}(x) & \dots & u_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

matrice Wronskiana

Prop: (1)  $u_1, \dots, u_n$  sono una base di  $V$

$$(2) \quad \forall x_0 \in I \quad \det W(x_0) \neq 0$$

(3)  $\exists x_0 \in I \quad \det W(x_0) \neq 0$

Sono equivalenti.

Dim: L'unica cosa non completa è  $(1) \Rightarrow (2)$   
 $x_0 \in I$

$$x_0 \in \mathbb{J} \\ W(x_0) = \left( J_{x_0} u_1, \dots, J_{x_0} u_n \right)$$

$$\text{ma} \quad J_{n, x_0} : V \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$$

Se  $u_1, \dots, u_n$  lin indipendenti in  $V$   
 $Tu_1, \dots, Tu_n$  " " "  $\mathbb{R}^n$

$$\det (Ju_1, \dots, Ju_n) \neq 0$$

$$I = VZ \quad \#$$

FATTO (senza dim)

TO (senza dim)

Se  $W$  è sol matriciale dell' eq

$$\dot{W}(x) = A(x) W(x)$$

&  $W(x_0)$  invertible

Allora posto  $w(x) = \det W(x)$

si ha  $w'(x) = \left( \frac{1}{t(x)} A(x) \right) w(x)$

# A COSA SERVE IL MdVdC?

- ① Se ho un'eq del tipo  $P(D)u = q(x)e^{\lambda_0 x}$   
NON uso il MdVdC (non è conveniente)
- ② il MdVdC funziona anche per problemi non autonomi
  - A funziona per termini non omop.  
non è del tipo polin+exp
  - B funziona per ottenere risult. teorici

Es A

$$u'' + u = \frac{1}{\cos x}$$

trovare le soluzioni

Soluz. dell'omogenea

$$u_1(x) = \cos x$$

$$u_2(x) = \sin x$$

$$W(x) = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$W^{-1}(x) = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$$

$$v = \begin{pmatrix} u \\ u' \end{pmatrix}$$

$$W(x) \cdot \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\cos x \end{pmatrix}$$

$$\dot{v} = \begin{pmatrix} u' \\ u'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u' \\ -u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\cos x \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} c_1' \cos x + c_2' \sin x = 0 \\ c_1' (-\sin x) + c_2' \cos x = 1/\cos x \end{cases}$$

$$\dot{v} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\cos x \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\cos x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sin x}{\cos x} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} c_1'(x) = \frac{-\sin x}{\cos x} \\ c_2'(x) = 1 \end{cases}$$

$$c_1(x) = \log |\cos x|$$

$$c_2(x) = x$$

La sol generale dell' eq data è

$$u(x) = A \cos x + B \sin x + \underbrace{\cos x \log |\cos x|}_{c_1(x)} + \underbrace{x \sin x}_{c_2(x)}$$

con  $A, B \in \mathbb{R}$  costanti arbitrarie

Soluzione partiel trovata col Metodo

Es B

$$u'' - u = f(x) \quad (E)$$

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 1$$

(i)  $\forall f \in BC(\mathbb{R}) \quad \exists! u_f \in BC(\mathbb{R})$   
che soddisfa (E)

(ii) se  $f$  infinitesima per  $x \rightarrow \pm \infty$   
 $\Rightarrow u_f$  è infinitesima

Oss: Le soluzioni di (E) saranno del tipo

$$u(x) = u_f(x) + A e^{-x} + B e^x$$

$$u_1(x) = e^{-x} \quad u_2(x) = e^x \quad \text{sol dell'om.}$$

$$W(x) = \begin{pmatrix} e^{-x} & e^x \\ -e^{-x} & e^x \end{pmatrix}$$

$$W^{-1}(x) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^x & -e^x \\ e^{-x} & e^{-x} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = W^{-1}(x) \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix} \quad \begin{cases} c_1'(x) = -\frac{1}{2} e^x f(x) \\ c_2'(x) = \frac{1}{2} e^{-x} f(x) \end{cases}$$

$$c_1(x) = A - \frac{1}{2} \int_0^x e^t f(t) dt$$

$$c_2(x) = B + \frac{1}{2} \int_0^x e^{-t} f(t) dt$$

Sol generale

~~A, B~~  $\in \mathbb{R}$

$$u(x) = \left( A - \frac{1}{2} \int_0^x e^t f(t) dt \right) e^{-x} + \left( B + \frac{1}{2} \int_0^x e^{-t} f(t) dt \right) e^x \quad (*)$$

$$A = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^t f(t) dt$$

$$B = -\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-t} f(t) dt$$

$$|e^{-t} f(t)| \leq \|f\|_{\infty} e^{-t} \quad \text{integrable sur } [0, +\infty)$$

$$u_f(x) = -\frac{1}{2} \left( \int_{-\infty}^x e^t f(t) dt \right) e^{-x} - \frac{1}{2} \left( \int_x^{+\infty} e^{-t} f(t) dt \right) e^x$$

$$-\frac{1}{2} \left( \int_0^{+\infty} e^{-t} f(t) dt - \int_0^x e^{-t} f(t) dt \right)$$

$$\left| \int_{-\infty}^x e^{t-x} f(t) dt \right| \leq \|f\|_{\infty} \left| \int_{-\infty}^x e^{t-x} dt \right| = \|f\|_{\infty}$$

$$t-x=s$$

$$\int_{-\infty}^0 e^s ds = 1$$

nello stesso modo

$$\left| \int_x^{+\infty} e^{x-t} f(t) dt \right| \leq \|f\|_\infty$$

$$|u_f(x)| \leq \frac{1}{2} \|f\|_\infty + \frac{1}{2} \|f\|_\infty = \|f\|_\infty$$

(i) ~~ii~~

Per dimostrare (ii)

si procede come nel compito  
usando l'Hôpital

SISTEMI LINEARI  $2 \times 2$  omog.  
& COEFF. COSTANTI

$$\begin{cases} x'(t) = a x(t) + b y(t) \\ y'(t) = c x(t) + d y(t) \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

[Per semplicità suppongo  
 $\det A \neq 0$ ]

Come sono fatte le soluzioni

$$P(\lambda) \doteq \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad-bc)$$

$$= \lambda^2 - (\operatorname{tr} A)\lambda + \det A$$

Caso 1:  $A$  è diagonalizzabile su  $\mathbb{R}$   
 $\exists v, w \in \mathbb{R}^2$  t.c.  $\rightarrow v, w$  lin. indep.  
 $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$   $Av = \lambda v$   
 $Aw = \mu w$

$$u_1(t) = v e^{\lambda t}$$

è soluz.

$$\dot{u}_1(t) = \lambda v e^{\lambda t} = A u_1$$

$$u_2(t) = w e^{\mu t}$$

"

$$\dot{u}_2(t) = \mu w e^{\mu t} = A u_2$$

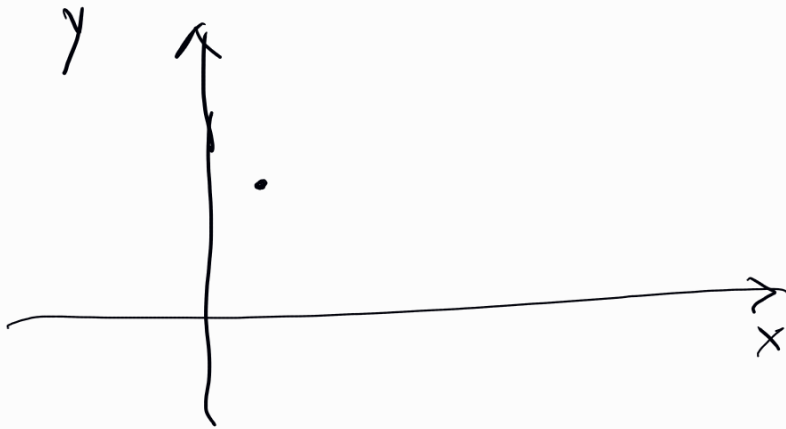
una soluzione generale del sistema

$$e \quad u(t) = \alpha v e^{\lambda t} + \beta w e^{\mu t}$$

al variare di  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Oss: se  $u(t)$  è soluzione allora

anche  $u(t - t_0)$  è soluzione  
perché il problema è autonomo



Data  $u$  soluzione

come è fatto l'insieme  $\{u(t) : t \in \mathbb{R}\}$

$$u(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

Se scelgo il sistema  
di coordinate  $(v, w)$

il sistema diventa

$$\begin{cases} X' = \lambda X \\ Y' = \mu Y \end{cases}$$

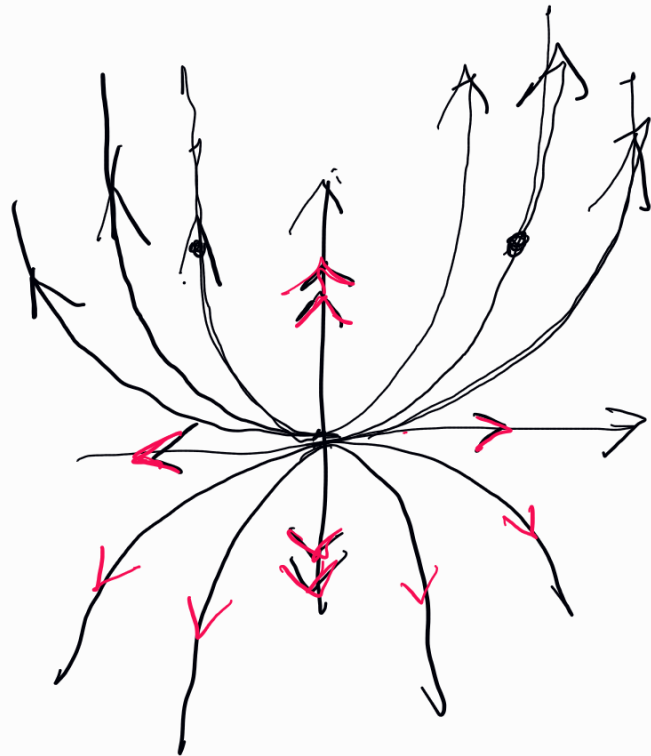
$$X(t) = \alpha e^{\lambda t}$$

$$Y(t) = \beta e^{\mu t}$$

$$\frac{|X|^\mu}{|Y|^\lambda} = \frac{\alpha^\mu \cancel{e^{\mu \lambda t}}}{\beta^\lambda \cancel{e^{\mu \lambda t}}}$$

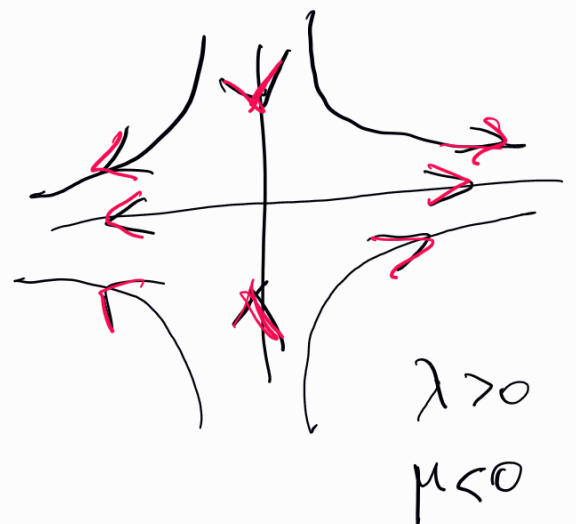
$$|Y| = c |X|^{\mu/\lambda}$$

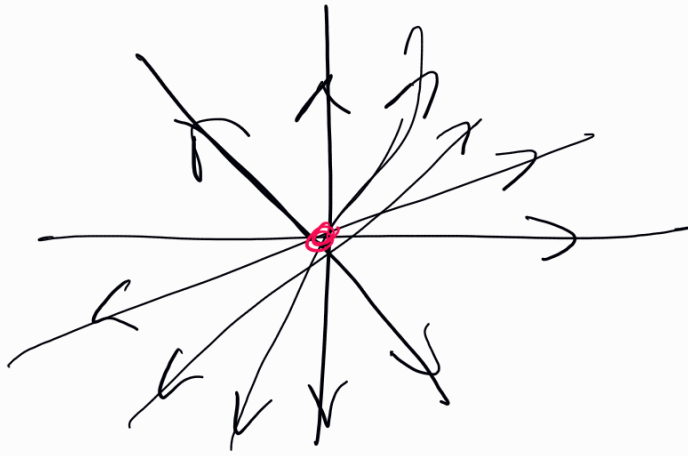
Per fare un disegno  
suppongo  $\mu > \lambda > 0$



Se  $\lambda \cdot \mu < 0$

Se  $\lambda = \mu$





Es per cosa

Cosa succede se

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ?$$