

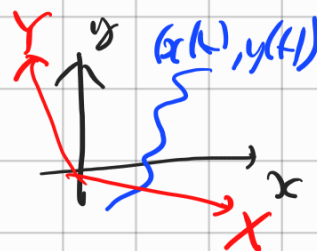
ANALISI MATEMATICA B

LEZIONE 66 - 16.3.2026

SISTEMI LINEARI OMOGENEI PRIMO ORDINE $\dim=2$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$x = x(t) \\ y = y(t).$$



Se cambio variabili $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$

il sistema diventa $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}' = M^{-1} A M \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$

Se A è diag. bile:

$$A \sim \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} X' = \lambda X \\ Y' = \mu Y \end{cases}$$

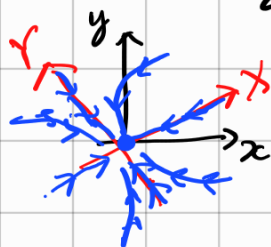
GIÀ VISTO

$$X = c_1 e^{\lambda t} \\ Y = c_2 e^{\mu t}$$

Stabile se posto vicino al punto di equilibrio rimane vicino.

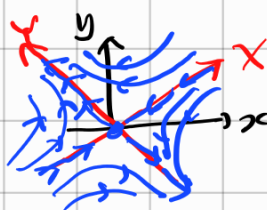
Asintoticamente: ... tendendo al punto di eq.

$$\lambda < \mu < 0$$



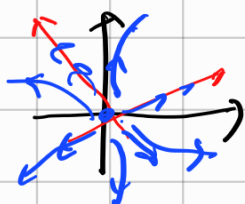
NODO ASINTOTICAMENTE STABILE

$$\lambda < 0 < \mu$$



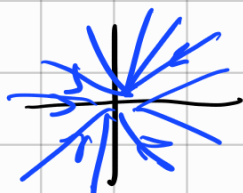
SELLA (INSTABILE)

$$0 < \lambda, \mu$$



NODO INSTABILE

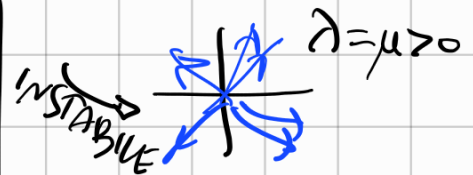
$$\lambda = \mu < 0$$



STELLA

STABILE

$$M^{-1} I M = \bar{M}^{-1} \bar{M} = I$$



$$\lambda = \mu > 0$$

Per caso

$$A \sim \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \leftarrow \text{Forma di Jordan}$$

NO DO
IMPROPRIO



Autorevoli complessi

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$$

$$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

← autorevoli complessi coniugati.

(in generale scrivere A in forma di Jordan - reale)

Sia $\underline{v} + i\underline{w}$ un autorevole relativo $\alpha - i\beta$
(l'altro autorevole è $\underline{v} - i\underline{w}$)
 $\underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{R}^2$

$$A(\underline{v} + i\underline{w}) = (\alpha - i\beta)(\underline{v} + i\underline{w}) = \alpha\underline{v} + \beta\underline{w} + i(-\beta\underline{v} + \alpha\underline{w})$$

$\downarrow$
 $A\underline{v} + iA\underline{w}$

$$\begin{cases} A\underline{v} = \alpha\underline{v} + \beta\underline{w} \\ A\underline{w} = -\beta\underline{v} + \alpha\underline{w} \end{cases} \quad \text{"} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{v} \\ \underline{w} \end{pmatrix} \text{"}$$

Se X, Y sono le coordinate relative alla base $\underline{v}, \underline{w}$ ($\underline{v}, \underline{w}$ sono indipendenti perché $\underline{v} \pm i\underline{w}$ sono indep.)

Nella base $\underline{v}, \underline{w}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = X \underline{v} + Y \underline{w}$$

CAMBIO DI BASE

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha X - \beta Y \\ \beta X + \alpha Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} X' = \alpha X - \beta Y \\ Y' = \beta X + \alpha Y \end{cases}$$

$$\beta Y = \alpha X - X'$$

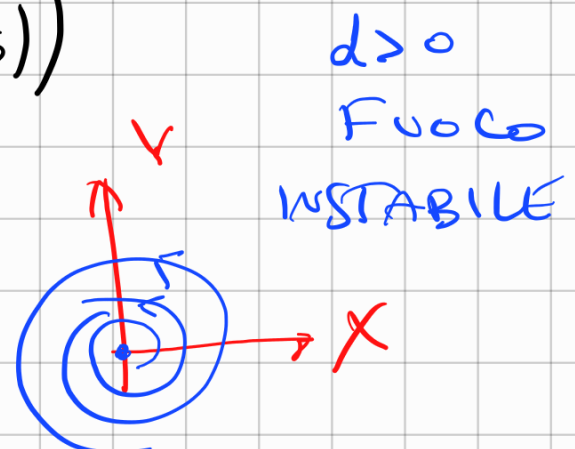
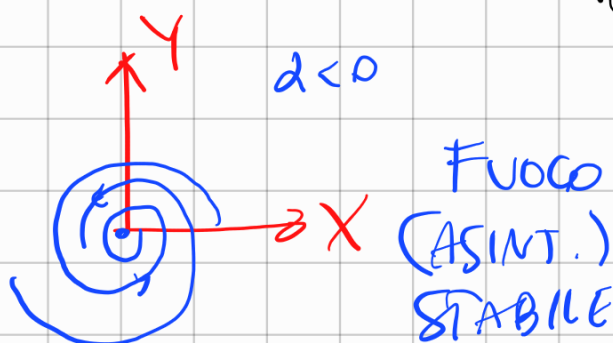
$$\begin{aligned} X'' &= \alpha X' - \beta Y' = \alpha X' - \beta (\beta X + \alpha Y) \\ &= \alpha X' - \beta^2 X - \alpha (\alpha X - X') \end{aligned}$$

$$X'' - 2\alpha X' + (\alpha^2 + \beta^2)X = 0$$

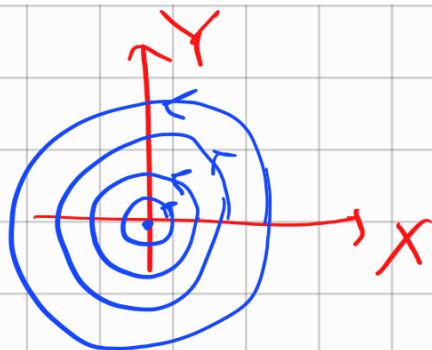
$$P(\lambda) = \lambda^2 - 2\alpha\lambda + \alpha^2 + \beta^2$$

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta \quad (\text{gli stessi di prima!})$$

$$\begin{cases} X(t) = \rho e^{\alpha t} \cos(\beta(t-t_0)) \\ \dots\dots\dots (\text{FACENDO I CONTI}) \\ Y(t) = \rho e^{\alpha t} \sin(\beta(t-t_0)) \end{cases}$$



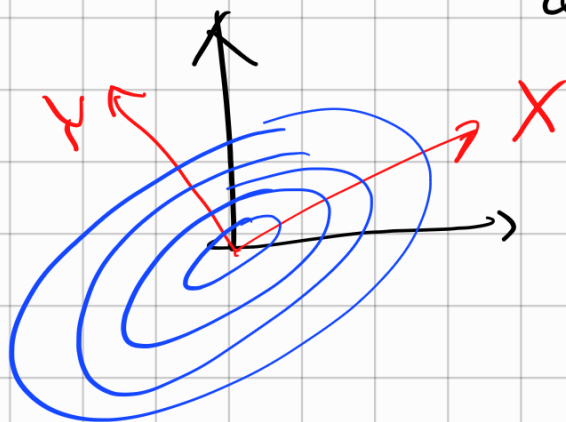
$$\alpha = 0$$



CENTRO

(STABILE MA NON ASINTOTICAMENTE)

Nel piano x, y c'è di mezzo una "affinità"



Teorema (linearizzazione)

Consideriamo il sistema non lineare:

$$\underline{u}' = \underline{f}(\underline{u})$$

$$\left[\begin{array}{l} \underline{m} = 2 \\ \begin{cases} x' = f_1(x, y) \\ y' = f_2(x, y) \end{cases} \end{array} \right]$$

Sia u_0 un punto di equilibrio, cioè

$u_0 \in \mathbb{R}^n$ tale che $u(t) = u_0$ è soluzione.

(ovvero $\underline{f}(u_0) = 0$)

Considero il sistema lineare dato in u_0

$$u' = Au$$

con

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(u_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(u_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(u_0) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(u_0) \end{pmatrix}, \quad \underline{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$
$$\underline{f} = (f_1, \dots, f_n)$$

Se la parte reale degli autovalori di A è diversa da 0 il sistema non lineare ha "lo stesso comportamento qualitativo" di quello lineare, in un intorno di x_0 .

ES: $u'' + \sin u = 0$ (PENDOLO)

$u = u(t)$ = angolo rispetto alla verticale

$$x(t) = u(t)$$

$$y(t) = u'(t) = x'(t)$$

$$\begin{cases} y' = -\sin x \\ x' = y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -\sin x \end{cases}$$

$$\underline{f}(x, y) = \begin{pmatrix} y \\ -\sin x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$$

$$Df = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos x & 0 \end{pmatrix}$$

Il sistema lineare dato in $(x, y) = (0, 0)$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 1, \quad \text{tr } A = 0$$

$\lambda_1 \lambda_2 \quad \lambda_1 + \lambda_2$

$$\lambda_{1,2} = \pm i$$

$$\lambda \cdot (-\lambda) = 1$$

$$\lambda^2 = -1$$

$$\lambda = i$$

$$(\text{Re } \lambda = 0)$$

CENTRO

il teorema non si applica!

ES?

pendolo smorzato

$$u'' + \gamma u' + \sin u = 0$$

... si trova un FUOCO STABILE

il teorema di linearizzazione si applica!

MODELLI DI CRESCITA BIOLOGICA

• Modello di Malthus

$t = \text{tempo}$ $\swarrow$ tempo
reproduzione
 $\downarrow$

$u(t)$ = numero di individui di una specie $\in \mathbb{R}$

$$u'(t) = \frac{du}{dt} = \frac{\text{nascite} - \text{morti}}{\Delta t} = a \cdot u(t)$$

Soluzione:

$$u(t) = c \cdot e^{at}$$

$\uparrow$
tasso di crescita



• Modello logistico

convezione dovuta alla

competizione tra individui.

$$u'(t) = a \cdot u(t) - b \cdot u^2(t)$$

$\uparrow$
crescita
Malthusiana

$\uparrow$ il numero di
"incontri" tra individui

Considerando variabili si può supporre $a=1, b=1$

$$u' = u - u^2$$

$u=0$ è soluzione. $u=1$ è
soluzione

$$\frac{u'}{u - u^2} = 1$$

$$\int \frac{1}{u(1-u)} du = \int 1 \cdot dt$$

$$\frac{1}{u(1-u)} = \frac{1}{u} + \frac{1}{1-u}$$

$$\int \frac{1}{u(1-u)} du = \ln|u| - \ln|1-u| \\ = \ln\left|\frac{u}{1-u}\right|$$

$$\ln \left| \frac{u}{1-u} \right| = t - t_0$$

$$\frac{u}{1-u} = \pm e^{t-t_0}$$

$$\dots \quad u = \pm e^{t-t_0} (1-u) = \pm e^{t-t_0} \mp e^{t-t_0} u$$

$$u (1 \mp e^{t-t_0}) = \pm e^{t-t_0}$$

$$u = \frac{\pm e^{t-t_0}}{1 \mp e^{t-t_0}} = 1 - \frac{1}{1 \mp e^{t-t_0}}$$

