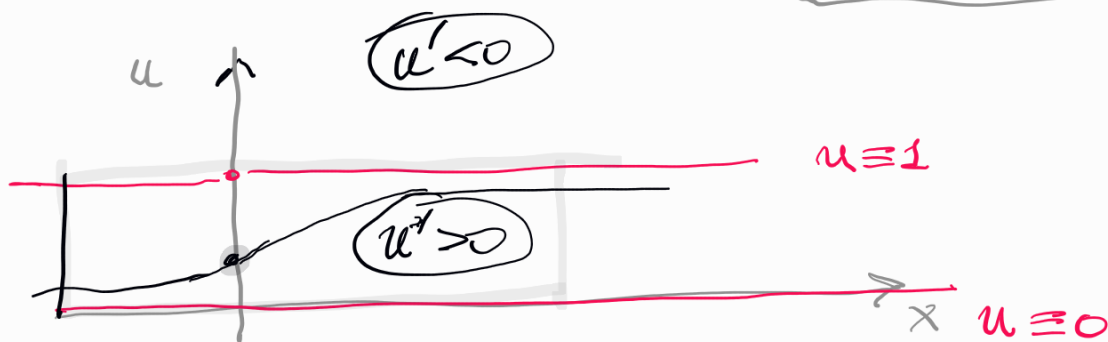


18 marzo 2026

STUDI QUALITATIVI

Esempio (già visto)

$$\begin{cases} u' = u - u^2 & (E) \\ u(0) = y_0 > 0 \end{cases}$$



IDEA:
Possiamo ottenere info interessanti senza dover necessariamente calcolare l'espressione esplicita della soluzione

$$\text{Se } 0 < y_0 < 1 \Rightarrow u(x) \in (0, 1) \quad \forall x \in I$$

$$\Rightarrow I = \mathbb{R}$$

$$u' = u - u^2 > 0 \quad \forall x \in I$$

$\Rightarrow u$ ammette limiti per $x \rightarrow +\infty$ e $x \rightarrow -\infty$ finito

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = l \in [0, 1]$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u' = \lim_{x \rightarrow +\infty} (u(x) - u^2(x)) = l - l^2 = 0$$

$$\Rightarrow l(l-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} l=0 \\ l=1 \end{cases}$$

OSS: se $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = l \in \mathbb{R}$ } $\Rightarrow l' = 0$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} u'(x) = l'$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u(n+1) - u(n) = 0$$

$$u(n+1) - u(n) = u'(\xi_n) \longrightarrow \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} u'(x)}$$

$\uparrow$
 $\xi_n \in (n, n+1)$

Lagrange $\xi_n \rightarrow +\infty$

Lo stesso argomento mostra che $\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) = 0$

$\leftarrow$ se $y_0 \in (0, 1)$

E se $y_0 > 1$?

$$u(x) > 1$$

per il l'unicità
della soluzione

$$u(x) \in [1, y_0] \quad \forall x \in I$$

$$\Rightarrow I \supset [0, +\infty)$$

$$\Rightarrow u'(x) < 0 \quad \text{cioè } u(x) \text{ decresce} \quad \Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = l \geq 1$$

Lo stesso ragionam. di prima

implica che $l = 1$

Cosa succede quando $y_0 > 1$

$x < 0$

Si ha che $\exists \bar{x} < 0$ t.c.

$u' < 0$

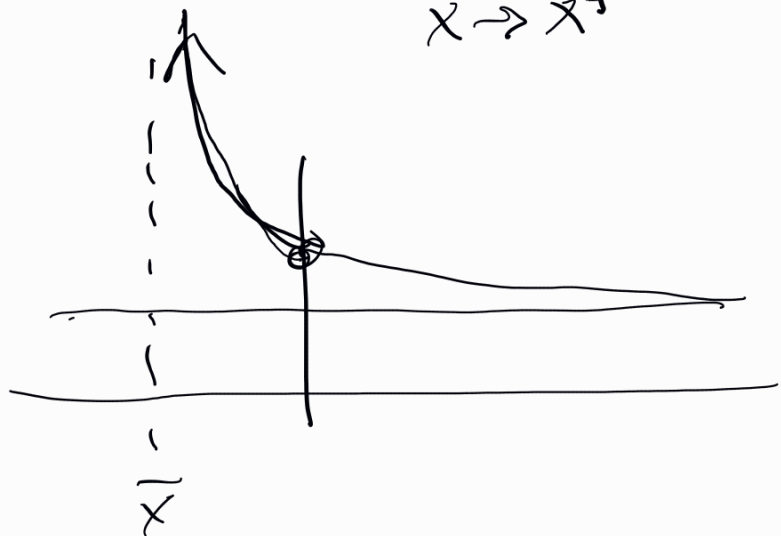
$u \equiv 1$

$u \equiv 0$

intervallo massimale
di definizione

X ESERCIZIO

... $(\bar{x}, +\infty)$ è l'int. massimale di definizione e $\lim_{x \rightarrow \bar{x}^+} u(x) = +\infty$



LOTKA - VOLTERRA

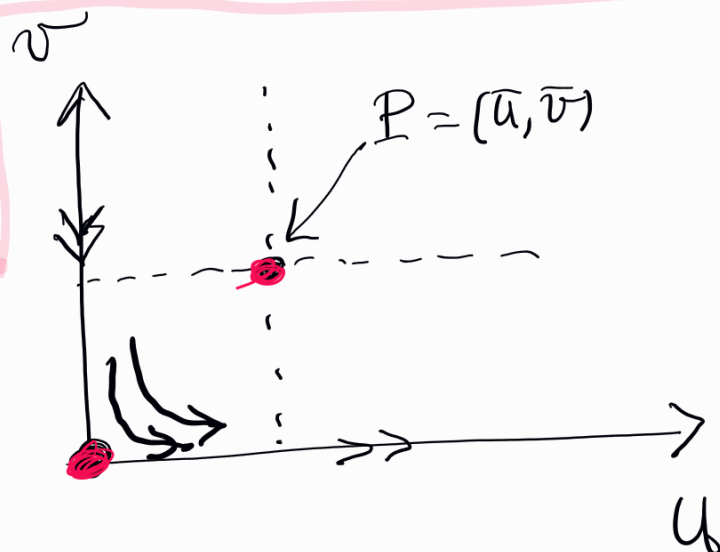
$u \geq 0 \quad v \geq 0$

Preda u
Predatore v

$$\begin{cases} u' = A u - B u v \\ v' = v(-C + D u) \end{cases} \quad \boxed{-\varepsilon u^2}$$

$\varepsilon \geq 0$
 $A, B, C, D > 0$

Sistema autonomo
traiettorie
non si
intersecano



Per $\varepsilon = 0$

Quali sono gli equilibri del sistema? (cioè soluz del tipo $\begin{matrix} u \equiv \bar{u} \\ v \equiv \bar{v} \end{matrix}$)

$$u' = 0 \iff u(A - Bv) = 0 \iff \begin{matrix} u = 0 \\ v = \frac{A}{B} \end{matrix}$$

$$v' = 0 \iff v(-C + Du) = 0 \iff \begin{matrix} v = 0 \\ u = \frac{C}{D} \end{matrix}$$

$$\boxed{\begin{matrix} u' = 0 \\ v' = 0 \end{matrix}} \iff \begin{matrix} (u, v) \equiv (0, 0) \\ (u, v) \equiv \left(\frac{C}{D}, \frac{A}{B}\right) \end{matrix}$$

Come sono fatte le soluzioni vicino a zero

$$u' = \cancel{A}u - Bu v$$

$$v' = -\cancel{C}v + Du v$$

Sistema linearizzato
vicino a (0,0)

$$\begin{cases} u' = Au \\ v' = -Cv \end{cases}$$

matrice associata $\rightarrow \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -C \end{pmatrix}$

$(0,0)$ è una sella per il
sistema linearizzato
(e quindi anche
per il sist. di partenza)

Studio il sistema vicino
a $(\bar{u}, \bar{v}) = \left(\frac{C}{D}, \frac{A}{B}\right)$

$$u(t) = \frac{C}{D} + x(t)$$

$$\text{con } |x| \ll 1 \\ |y| \ll 1$$

$$v(t) = \frac{A}{B} + y(t)$$

$$\begin{aligned} x' = u' &= A \left(\frac{C}{D} + x\right) - B \left(\frac{A}{B} + y\right) \left(\frac{C}{D} + x\right) \\ &= \frac{AC}{D} + Ax - (A + By) \left(\frac{C}{D} + x\right) \\ &= \boxed{-\frac{BC}{D} y} - Bxy \end{aligned}$$

$$y' = v' = \left(\frac{A}{B} + y \right) \left(-C + D \left(\frac{C}{D} + x \right) \right)$$

$$= \left(\frac{A}{B} + y \right) (Dx) = \boxed{\frac{AD}{B} x} + Dx y$$

sistemi linearizzati

$$\begin{cases} x' = -\frac{BC}{D} y \\ y' = \frac{AD}{B} x \end{cases}$$

matrice associata

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{BC}{D} \\ \frac{AD}{B} & 0 \end{pmatrix}$$

Polinomio caratteristico

$$P(\lambda) = \lambda^2 + AC$$

Ho solo autovalori
immaginari puri $\Rightarrow$

il teorema di linearizzazione non si applica

Per capire la natura
dell'equilibrio $P = (\bar{u}, \bar{v})$
facciamo uno studio
qualitativo

$$\begin{cases} u' = u(A - Bv) \\ v' = v(-C + Du) \end{cases}$$

→ moltiplico
in
croce
↙

$$u' v (-C + Du) = v' u (A - Bv)$$

divido per $u \cdot v$

$$u' \left(-\frac{C}{u} + D \right) = v' \left(\frac{A}{v} - B \right)$$

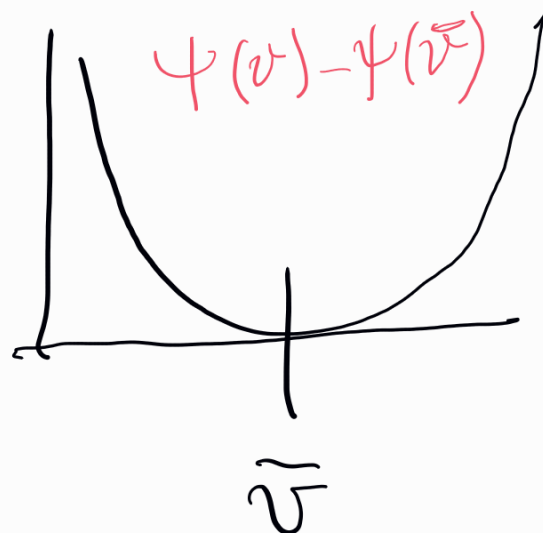
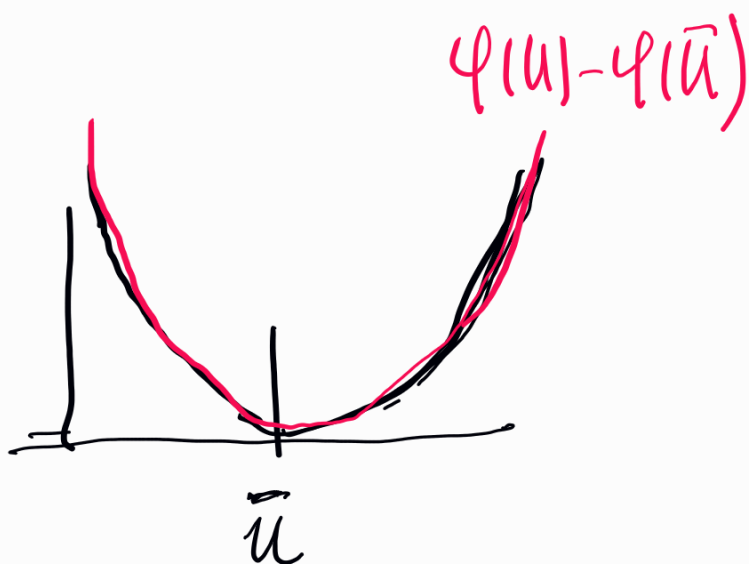
$$\frac{d}{dt} (-c \log u + Du) = \frac{d}{dt} (A \log v - Bv)$$

$$\frac{d}{dt} \left[\underbrace{Du - c \log u}_{\varphi(u)} + \underbrace{Bv - A \log v}_{\psi(v)} \right] = 0$$

OSS: su $u > 0$

φ ha minimo in $\bar{u}$

ψ ha minimo in $\bar{v}$



$$H(u, v) \doteq \varphi(u) - \varphi(\bar{u}) + \psi(u) - \psi(\bar{v})$$

① $H(u, v) \geq 0$

② H è costante sulle
traiettorie soluzioni
del sistema

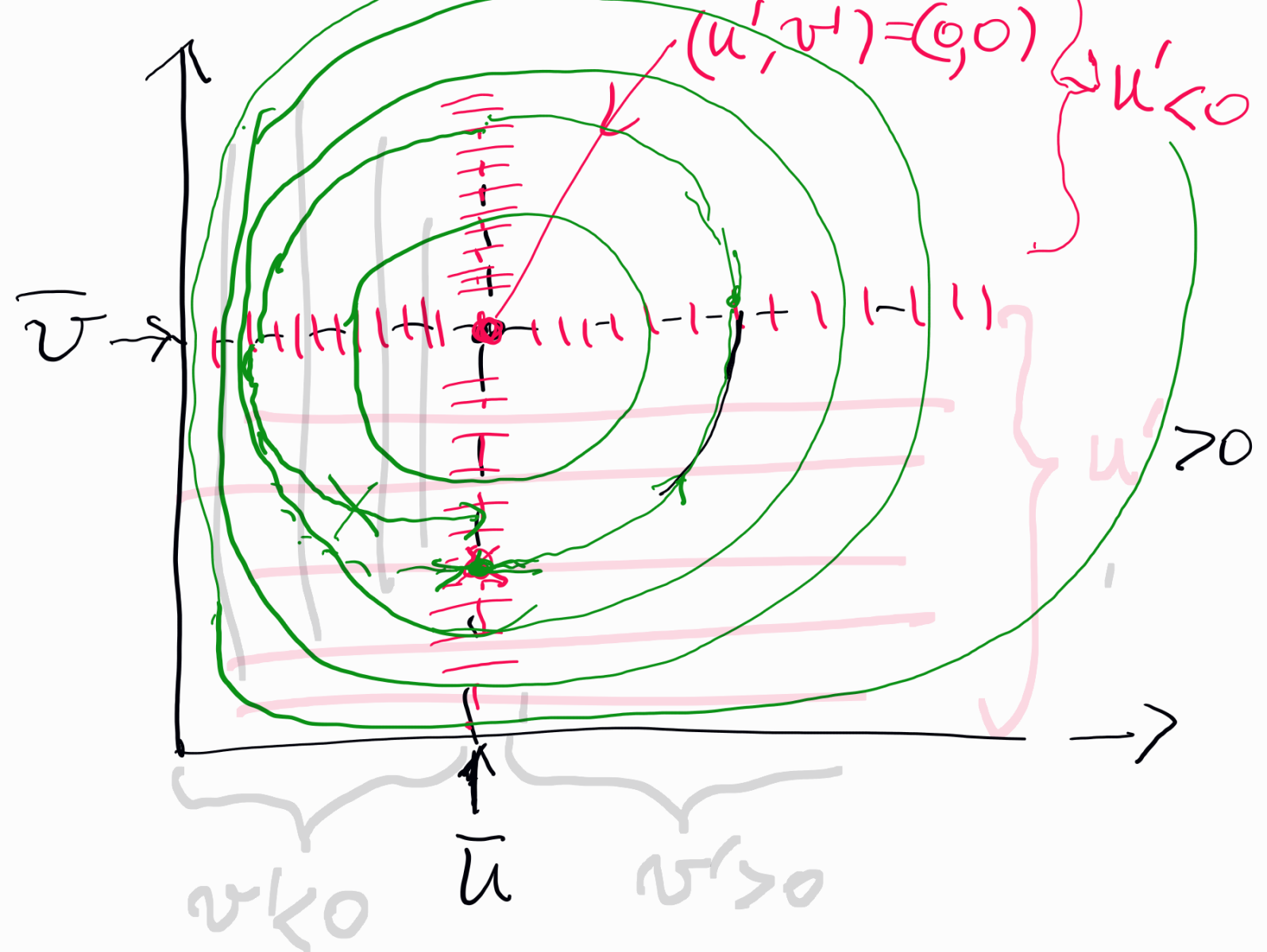
(i.e. $H(u(t), v(t)) = K \quad \forall t$)

Q: Come è fatto l'insieme
 $H(u, v) = 0$?

$$\begin{cases} u' = u(A - BV) \\ v' = v(-C + Du) \end{cases}$$

$$u' > 0 \Leftrightarrow v < \bar{v} = A/B$$

$$v' > 0 \Leftrightarrow u > \bar{u} = C/D$$



$$\text{se } u = \bar{u} \Rightarrow v' = 0$$

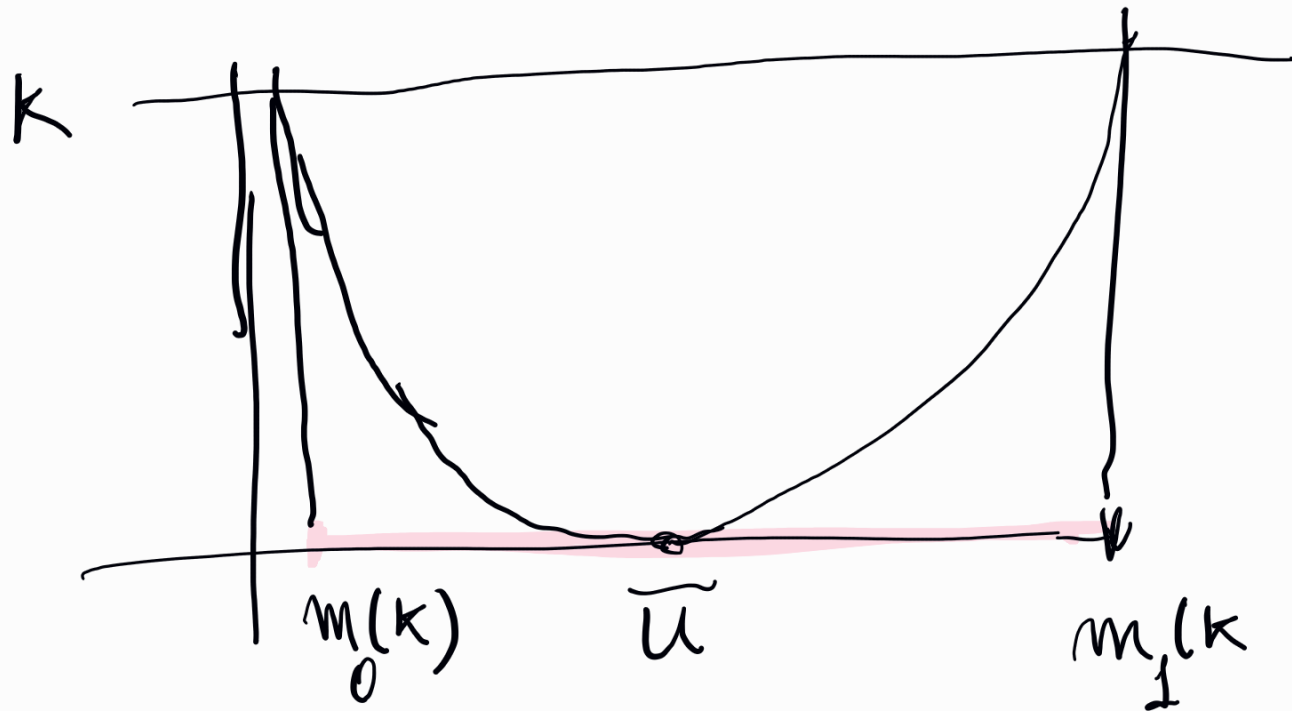
$$v = \bar{v} \Rightarrow u' = 0$$

$$H(u(t), v(t)) = k \quad \forall t$$

$$\overbrace{\varphi(u(t)) - \varphi(\bar{u})}^{\geq 0} + \overbrace{\psi(v(t)) - \psi(\bar{v})}^{\geq 0} = k$$

$$\psi(v(t)) - \psi(\bar{v}) \leq k \quad \forall t$$

$$\varphi(u(t)) - \varphi(\bar{u}) \leq k \quad \forall t$$



$$m_0(k) \leq u(t) \leq m_1(k)$$

$$u(t_0) = \bar{u}$$

$$v(t_0) < \bar{v}$$

$\rightsquigarrow$

$$u(t_1) = \bar{u}$$

$$v(t_1) < \bar{v}$$

$$v(t_1) \stackrel{?}{=} v(t_0)$$

$$H(u(t_1), v(t_1)) = H(u(t_0), v(t_0))$$



$$\psi(v(t_1)) = \psi(v(t_0))$$



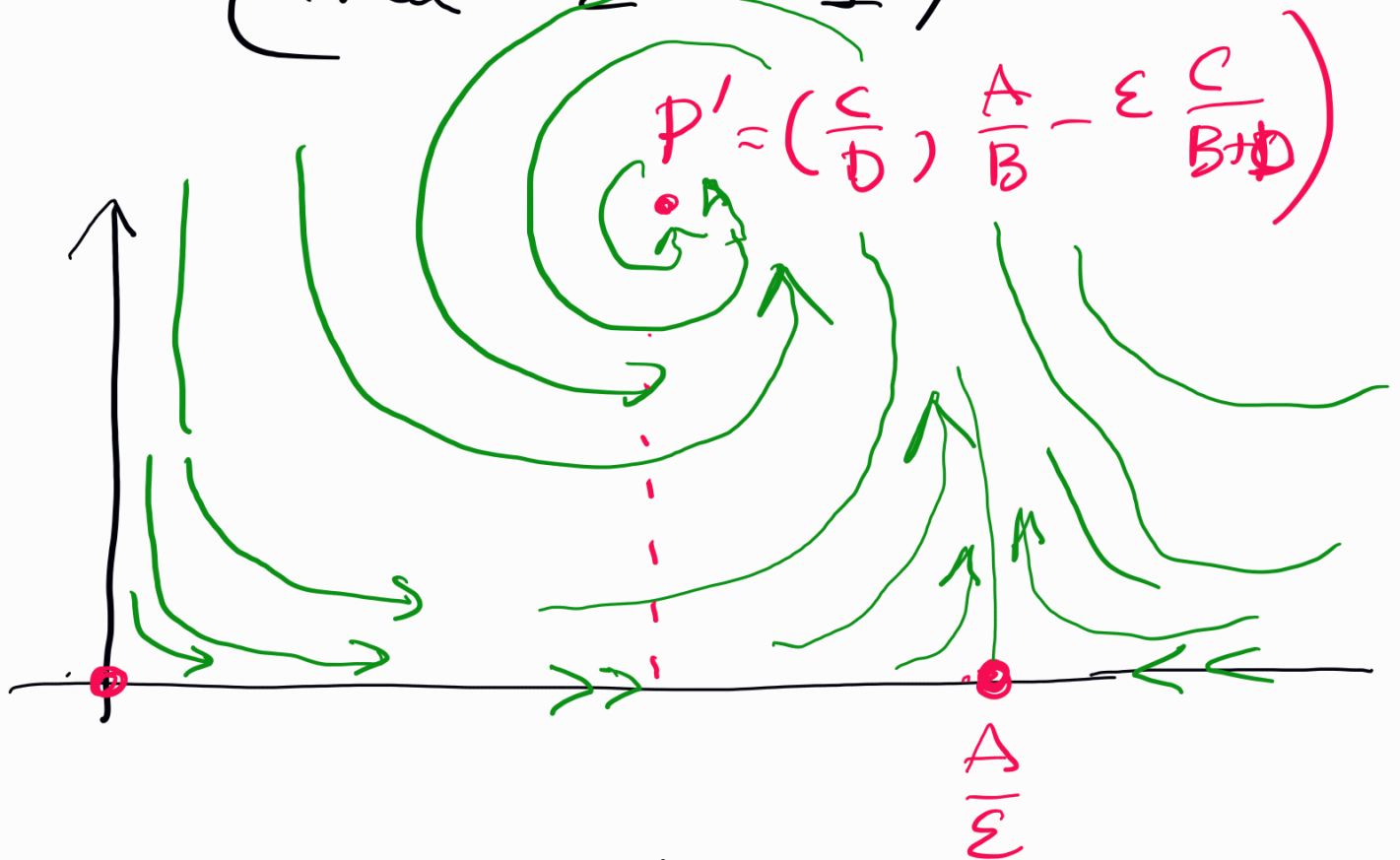
$$v(t_1) = v(t_0)$$

perché ψ è iniettiva

su $\{v \leq \bar{v}\}$

Cosa succede se $\varepsilon > 0$

(ma $\varepsilon \ll 1$)



sistema preda-
predatore & pesca $\textcircled{E}$

$$\begin{cases} u' = (A - E)u - Buv - \varepsilon u^2 \\ v' = (-C - E)v + DuV \end{cases}$$

Come cambia l'equilibrio stabile
 $P \rightsquigarrow P'$

$$\bar{u} = \frac{C}{D}$$



valore delle
prede all'
equilibrio

Senza pesca

$$\bar{u} = \frac{C+E}{D}$$



valore delle
prede all'
equilibrio

con la
pesca