

Analisi Matematica A-B

Prova scritta n. 1

Laurea in Fisica, a.a. 2025/26
Università di Pisa

25 maggio 2026

1. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^2 + e^{-x}$.

- (a) Dimostrare che f non ha massimo.
- (b) Dimostrare che f ha un unico punto di minimo assoluto.
- (c) Dimostrare che $f(x) > \frac{1}{2}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Soluzione. (a) Per $x \rightarrow +\infty$ si ha $x^2 \rightarrow +\infty$ ed $e^{-x} \rightarrow 0$. Quindi

$$f(x) = x^2 + e^{-x} \rightarrow +\infty.$$

La funzione è illimitata superiormente; pertanto non può possedere massimo assoluto.

(b) Calcoliamo

$$f'(x) = 2x - e^{-x}, \quad f''(x) = 2 + e^{-x} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dunque f è strettamente convessa e f' è strettamente crescente. Inoltre

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty.$$

Per il teorema degli zeri esiste almeno un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $f'(x_0) = 0$; poiché f' è strettamente crescente, tale punto è unico. Essendo f strettamente convessa, l'unico punto critico è l'unico punto di minimo assoluto. Esso è caratterizzato da

$$2x_0 = e^{-x_0}.$$

(c) Usiamo la disuguaglianza $e^u \geq 1 + u$, valida per ogni $u \in \mathbb{R}$. Ponendo $u = -x$ otteniamo

$$e^{-x} \geq 1 - x.$$

Pertanto

$$f(x) = x^2 + e^{-x} \geq x^2 + 1 - x = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} > \frac{1}{2}.$$

Quindi $f(x) > \frac{1}{2}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. □

2. Si consideri la successione a_n definita per ricorrenza da

$$\begin{cases} a_0 = 1, \\ a_{n+1} = \frac{1 - \cos a_n}{a_n}. \end{cases}$$

- (a) Dimostrare che $a_n \neq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.
- (b) Dimostrare che $a_n \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$.
- (c) Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Soluzione. (a) Dimostriamo per induzione che

$$0 < a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Per $n = 0$ si ha $a_0 = 1$. Supponiamo ora $0 < a_n$. Allora $\cos a_n < 1$, quindi $1 - \cos a_n > 0$ e

$$a_{n+1} = \frac{1 - \cos a_n}{a_n} > 0.$$

Inoltre, non è difficile mostrare che la funzione $f(t) := \frac{1 - \cos t}{t} \leq t$ per $t > 0$, anzi si ha che $f(t) \leq \frac{t}{2}$. Ciò discende immediatamente dal fatto che la funzione $g(t) := t^2/2 - 1 + \cos t$ ha un minimo globale stretto per $t = 0$: infatti g ha un minimo locale nell'origine (dato che $g(t) \sim \frac{t^4}{24}$ per $t \rightarrow 0$) e tale minimo è in realtà minimo globale dato che g è convessa (in quanto $g''(t) = 1 - \cos t \geq 0$).

Pertanto otteniamo

$$a_{n+1} = f(a_n) \leq \frac{a_n}{2} < a_n.$$

Di conseguenza la successione a_n è decrescente (e decresce in maniera geometrica).

(b) Dalla stima precedente segue

$$0 < a_{n+1} \leq \frac{a_n}{2}.$$

Iterando, per ogni $n \geq 1$,

$$0 < a_n \leq \frac{a_0}{2^n} = \frac{1}{2^n}.$$

Poiché $2^{-n} \rightarrow 0$, per confronto si ottiene

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0.$$

(c) Per una serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ si ha

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Nel nostro caso $a_n > 0$. Calcoliamo il limite del rapporto:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1 - \cos a_n}{a_n^2}.$$

Poiché $a_n \rightarrow 0$ e

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{t^2} = \frac{1}{2},$$

segue che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}.$$

Essendo $a_n > 0$, dal criterio del rapporto segue anche

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2}.$$

Pertanto

$$R = \frac{1}{1/2} = 2.$$

□

3. Si consideri la funzione integrale

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{5 + 3 \cos t} dt.$$

(a) Mostrare che F è ben definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ e calcolare $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$.

- (b) Mostrare che esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $F(x) - cx$ è una funzione 2π -periodica.
 (c) Determinare esplicitamente il valore di c .
 (d) Mostrare che $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione invertibile; chiamata G tale inversa mostrare che $G(y) - \frac{1}{c}y$ è una funzione periodica, determinarne il periodo.

Soluzione. Poniamo

$$p(t) = \frac{1}{5 + 3 \cos t}.$$

(a) Poiché $-1 \leq \cos t \leq 1$, si ha

$$2 \leq 5 + 3 \cos t \leq 8.$$

Quindi il denominatore non si annulla mai e p è continua su $\mathbb{R}$. Di conseguenza F è ben definita per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Inoltre

$$p(t) = \frac{1}{5 + 3 \cos t} \geq \frac{1}{8}.$$

Per $x > 0$,

$$F(x) = \int_0^x p(t) dt \geq \int_0^x \frac{1}{8} dt = \frac{x}{8}.$$

Ne segue

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty.$$

(b) La funzione p è 2π -periodica. Definiamo

$$c = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{5 + 3 \cos t}.$$

Poniamo $H(x) = F(x) - cx$. Allora

$$H(x + 2\pi) - H(x) = F(x + 2\pi) - F(x) - 2\pi c.$$

Ma

$$F(x + 2\pi) - F(x) = \int_x^{x+2\pi} p(t) dt = \int_0^{2\pi} p(t) dt = 2\pi c,$$

dove abbiamo usato la 2π -periodicità di p . Quindi $H(x + 2\pi) = H(x)$, cioè $F(x) - cx$ è 2π -periodica.

(c) Calcoliamo

$$c = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{5 + 3 \cos t}.$$

Per periodicità,

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{5 + 3 \cos t} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{5 + 3 \cos t}.$$

Usiamo il cambio $u = \tan(t/2)$, inteso in senso improprio su $(-\pi, \pi)$. Allora

$$\cos t = \frac{1 - u^2}{1 + u^2}, \quad dt = \frac{2}{1 + u^2} du.$$

Si ottiene

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{5 + 3 \cos t} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\frac{2}{1+u^2}}{5 + 3 \frac{1-u^2}{1+u^2}} du \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{5(1+u^2) + 3(1-u^2)} du \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{8 + 2u^2} du \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{u^2 + 4} du \\ &= \left[\frac{1}{2} \arctan \left(\frac{u}{2} \right) \right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Pertanto

$$c = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1}{4}.$$

(d) Si ha

$$F'(x) = \frac{1}{5 + 3 \cos x} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dunque F è strettamente crescente. Dal punto (a) sappiamo che $F(x) \rightarrow +\infty$ per $x \rightarrow +\infty$. Inoltre, per $x < 0$,

$$F(x) = - \int_x^0 p(t) dt \leq - \int_x^0 \frac{1}{8} dt = \frac{x}{8} \rightarrow -\infty \quad (x \rightarrow -\infty).$$

Quindi F è continua, strettamente crescente e ha immagine uguale a $\mathbb{R}$; pertanto è invertibile. Sia $G = F^{-1}$.

Dal punto (c), con $c = 1/4$,

$$F(x + 2\pi) = F(x) + 2\pi c = F(x) + \frac{\pi}{2}.$$

Posto $y = F(x)$, cioè $x = G(y)$, si ottiene

$$G\left(y + \frac{\pi}{2}\right) = G(y) + 2\pi.$$

Consideriamo

$$K(y) = G(y) - \frac{1}{c}y = G(y) - 4y.$$

Allora

$$\begin{aligned} K\left(y + \frac{\pi}{2}\right) &= G\left(y + \frac{\pi}{2}\right) - 4\left(y + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= G(y) + 2\pi - 4y - 2\pi \\ &= K(y). \end{aligned}$$

Quindi $G(y) - 4y$ è periodica di periodo $\pi/2$.

Mostriamo infine che tale periodo è minimo. Sia $T > 0$ un periodo di K . Allora, per ogni $y \in \mathbb{R}$,

$$K(y + T) = K(y),$$

cioè

$$G(y + T) - 4(y + T) = G(y) - 4y.$$

Ne segue

$$G(y + T) = G(y) + 4T.$$

Ponendo $y = F(x)$ otteniamo

$$G(F(x) + T) = x + 4T.$$

Applicando F ai due membri,

$$F(x + 4T) = F(x) + T \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Derivando rispetto a x ,

$$F'(x + 4T) = F'(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Poiché

$$F'(x) = \frac{1}{5 + 3 \cos x},$$

il numero $4T$ è un periodo positivo di F' . La funzione F' ha periodo minimo 2π ; infatti $F'(x+s) = F'(x)$ per ogni x implica $\cos(x+s) = \cos x$ per ogni x , e quindi $s \in 2\pi\mathbb{Z}$. Dunque

$$4T \in 2\pi\mathbb{N},$$

ossia

$$T \in \frac{\pi}{2}\mathbb{N}.$$

Ogni periodo positivo di K è quindi un multiplo intero di $\pi/2$. Poiché abbiamo già mostrato che $\pi/2$ è un periodo, esso è il periodo minimo di $G(y) - 4y$. $\square$

4. Si consideri l'equazione differenziale

$$y'' + y = \cos(\alpha x).$$

(a) Per $\alpha = 1$, determinare la soluzione $y(x)$ tale che $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$, e mostrare che

$$\limsup_{x \rightarrow +\infty} |y(x)| = +\infty.$$

(b) Per $\alpha = 2$, sia y la soluzione con dati iniziali $y(0) = 1, y'(0) = 0$. Mostrare che $y(x)$ è una funzione periodica e determinarne il periodo minimo.

(c) Determinare tutti gli $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali l'equazione ha soluzioni non limitate.

Soluzione. (a) Per $\alpha = 1$ l'equazione diventa

$$y'' + y = \cos x.$$

La soluzione generale dell'omogenea associata è

$$y_h(x) = A \cos x + B \sin x.$$

Poiché il termine forzante $\cos x$ è soluzione dell'omogenea, cerchiamo una particolare nella forma

$$y_p(x) = Cx \sin x.$$

Allora

$$y_p'(x) = C \sin x + Cx \cos x, \quad y_p''(x) = 2C \cos x - Cx \sin x.$$

Quindi

$$y_p''(x) + y_p(x) = 2C \cos x.$$

Serve $2C = 1$, dunque $C = 1/2$. La soluzione generale è

$$y(x) = A \cos x + B \sin x + \frac{x}{2} \sin x.$$

Dalla condizione $y(0) = 0$ si ottiene $A = 0$. Inoltre

$$y'(x) = -A \sin x + B \cos x + \frac{1}{2} \sin x + \frac{x}{2} \cos x,$$

e da $y'(0) = 0$ segue $B = 0$. Pertanto

$$y(x) = \frac{x}{2} \sin x.$$

Prendendo

$$x_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,$$

si ha $\sin x_k = 1$, quindi

$$|y(x_k)| = \frac{x_k}{2} \rightarrow +\infty.$$

Ne segue

$$\limsup_{x \rightarrow +\infty} |y(x)| = +\infty.$$

(b) Per $\alpha = 2$ l'equazione diventa

$$y'' + y = \cos(2x).$$

Cerchiamo una particolare nella forma $y_p(x) = C \cos(2x)$. Allora

$$y_p''(x) + y_p(x) = (-4C + C) \cos(2x) = -3C \cos(2x).$$

Serve $-3C = 1$, dunque $C = -1/3$. La soluzione generale è

$$y(x) = A \cos x + B \sin x - \frac{1}{3} \cos(2x).$$

Dalla condizione $y(0) = 1$ si ottiene

$$A - \frac{1}{3} = 1,$$

cioè $A = 4/3$. Inoltre

$$y'(x) = -A \sin x + B \cos x + \frac{2}{3} \sin(2x),$$

e da $y'(0) = 0$ segue $B = 0$. Quindi

$$y(x) = \frac{4}{3} \cos x - \frac{1}{3} \cos(2x).$$

La funzione $\cos x$ ha periodo minimo 2π , mentre $\cos(2x)$ ha periodo minimo π . Poiché il coefficiente di $\cos x$ è non nullo, il periodo minimo della somma è

$$T_{\min} = 2\pi.$$

(c) L'equazione omogenea associata è

$$y'' + y = 0,$$

le cui soluzioni sono

$$y_h(x) = A \cos x + B \sin x,$$

tutte limitate.

Se $\alpha \neq \pm 1$, cerchiamo una particolare nella forma $y_p(x) = C \cos(\alpha x)$. Allora

$$y_p''(x) + y_p(x) = (1 - \alpha^2)C \cos(\alpha x).$$

Serve

$$(1 - \alpha^2)C = 1,$$

quindi

$$C = \frac{1}{1 - \alpha^2}.$$

In questo caso

$$y(x) = A \cos x + B \sin x + \frac{\cos(\alpha x)}{1 - \alpha^2},$$

e tutte le soluzioni sono limitate.

Se invece $\alpha = 1$ oppure $\alpha = -1$, allora $\cos(\alpha x) = \cos x$ e una soluzione particolare è

$$y_p(x) = \frac{x}{2} \sin x,$$

che non è limitata. Sommando a essa una soluzione omogenea limitata si ottengono ancora soluzioni non limitate. Dunque l'equazione ha soluzioni non limitate se e solo se

$$\alpha = \pm 1.$$

□