

Analisi Matematica A-B

Prova scritta n. 1

Laurea in Fisica, a.a. 2025/26
Università di Pisa

25 maggio 2026

1. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^2 + e^{-x}$.

- (a) Dimostrare che f non ha massimo.
- (b) Dimostrare che f ha un unico punto di minimo assoluto.
- (c) Dimostrare che $f(x) > \frac{1}{2}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

2. Si consideri la successione a_n definita per ricorrenza da

$$\begin{cases} a_0 = 1, \\ a_{n+1} = \frac{1 - \cos a_n}{a_n}. \end{cases}$$

- (a) Dimostrare che $a_n \neq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.
- (b) Dimostrare che $a_n \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$.
- (c) Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

3. Si consideri la funzione integrale

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{5 + 3 \cos t} dt.$$

- (a) Mostrare che F è ben definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ e calcolare $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$.
- (b) Mostrare che esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $F(x) - cx$ è una funzione 2π -periodica.
- (c) Determinare esplicitamente il valore di c .
- (d) Mostrare che $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione invertibile; chiamata G tale inversa mostrare che $G(y) - \frac{1}{c}y$ è una funzione periodica, determinarne il periodo.

4. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ un parametro reale. Si consideri l'equazione differenziale

$$y'' + y = \cos(\alpha x).$$

- (a) Per $\alpha = 1$, determinare la soluzione $y(x)$ tale che $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$, e mostrare che

$$\limsup_{x \rightarrow +\infty} |y(x)| = +\infty.$$

- (b) Per $\alpha = 2$, sia y la soluzione con dati iniziali $y(0) = 1, y'(0) = 0$. Mostrare che $y(x)$ è una funzione periodica e determinarne il periodo minimo.
- (c) Determinare tutti gli $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali l'equazione ha soluzioni non limitate.