

Analisi Matematica

Soluzioni della prova scritta n.2

CdS Fisica

15 giugno 2026

Esercizio 1

Enunciato. Dire per quali $x \in \mathbb{R}$ la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\ln \frac{n+2}{n+1} \right) (1-x)^n$$

converge.

Soluzione. Poniamo

$$a_n := \ln \frac{n+2}{n+1} = \ln \left(1 + \frac{1}{n+1} \right), \quad t := 1-x.$$

La serie diventa

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n.$$

Osserviamo anzitutto che

$$a_n = \ln \left(1 + \frac{1}{n+1} \right) \sim \frac{1}{n+1} \quad (n \rightarrow +\infty).$$

Quindi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1,$$

perché a_n è asintoticamente equivalente a $1/(n+1)$. La serie di potenze in t ha dunque raggio di convergenza

$$R = 1.$$

Ne segue che converge assolutamente per

$$|t| < 1,$$

ovvero

$$|1-x| < 1 \iff 0 < x < 2.$$

Restano da studiare gli estremi.

Se $t = 1$, cioè se $x = 0$, si ha

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \ln \frac{n+2}{n+1}.$$

La somma parziale è telescopica:

$$\sum_{n=0}^N \ln \frac{n+2}{n+1} = \ln \prod_{n=0}^N \frac{n+2}{n+1} = \ln(N+2).$$

Poiché

$$\ln(N+2) \rightarrow +\infty,$$

la serie diverge per $x = 0$.

Se $t = -1$, cioè se $x = 2$, si ha

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \ln \frac{n+2}{n+1}.$$

La successione a_n è positiva, decrescente e infinitesima. Infatti

$$a_n = \ln \left(1 + \frac{1}{n+1} \right) > 0, \quad a_n \rightarrow 0$$

e

$$a_n - a_{n+1} = \ln \left(\frac{n+2}{n+1} \right) - \ln \left(\frac{n+3}{n+2} \right) = \ln \left(\frac{n^2 + 4n + 4}{n^2 + 4n + 3} \right) > 0,$$

quindi a_n è decrescente. Per il criterio di Leibniz la serie converge. Non converge però assolutamente, perché

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \ln \frac{n+2}{n+1}$$

diverge, come visto sopra. Pertanto l'insieme dei valori di x per cui la serie converge è

$$(0, 2].$$

La convergenza è assoluta per $0 < x < 2$ e condizionata per $x = 2$.

Esercizio 2

Enunciato. Per $a > 0$ si consideri l'integrale

$$I(a) = \int_0^1 \frac{\log(1 + ax^2)}{x^2} dx.$$

- (a) Mostrare che $I(a)$ è ben definito e derivabile per ogni $a > 0$.
- (b) Calcolare $I'(a)$.
- (c) Dedurre una formula esplicita per $I(a)$.
- (d) Calcolare

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{I(a)}{a}, \quad \lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{I(a)}{\sqrt{a}}.$$

Soluzione.

- (a) Fissiamo $a > 0$. L'unico punto problematico dell'integrale è $x = 0$, perché il denominatore è x^2 . Tuttavia, per $x \rightarrow 0^+$,

$$\log(1 + ax^2) \sim ax^2,$$

quindi

$$\frac{\log(1 + ax^2)}{x^2} \rightarrow a.$$

La singolarità in 0 è quindi eliminabile. L'integranda è continua su $(0, 1]$ e ammette limite finito in 0, dunque $I(a)$ è ben definito per ogni $a > 0$.

Per la derivabilità rispetto ad a , consideriamo

$$f(a, x) := \frac{\log(1 + ax^2)}{x^2}, \quad x \in (0, 1].$$

Per $a > 0$,

$$\frac{\partial f}{\partial a}(a, x) = \frac{1}{1 + ax^2}.$$

Per ogni $x \in (0, 1]$ e ogni $a > 0$ si ha

$$\left| \frac{\partial f}{\partial a}(a, x) \right| = \frac{1}{1 + ax^2} \leq 1.$$

La funzione costante 1 è integrabile su $(0, 1)$. Per il teorema di derivazione sotto il segno di integrale, si può derivare sotto il segno di integrale e quindi I è derivabile per ogni $a > 0$.

- (b) Dalla derivazione sotto il segno di integrale si ottiene

$$I'(a) = \int_0^1 \frac{1}{1 + ax^2} dx.$$

Poiché $a > 0$,

$$\int_0^1 \frac{1}{1 + ax^2} dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \arctan(\sqrt{a} x) \Big|_0^1.$$

Quindi

$$I'(a) = \frac{\arctan \sqrt{a}}{\sqrt{a}}.$$

(c) Poiché $I(0) := \lim_{a \rightarrow 0^+} I(a) = 0$, ricaviamo $I(a)$ integrando $I'(a)$ da 0 ad a :

$$I(a) = \int_0^a \frac{\arctan \sqrt{s}}{\sqrt{s}} ds.$$

Ponendo $u = \sqrt{s}$, cioè $s = u^2$ e $ds = 2u du$, otteniamo

$$I(a) = 2 \int_0^{\sqrt{a}} \arctan u du.$$

Ora

$$\int \arctan u du = u \arctan u - \frac{1}{2} \log(1 + u^2),$$

per integrazione per parti. Pertanto

$$I(a) = 2 \left[u \arctan u - \frac{1}{2} \log(1 + u^2) \right]_0^{\sqrt{a}}.$$

Si ottiene quindi

$$I(a) = 2\sqrt{a} \arctan \sqrt{a} - \log(1 + a).$$

(d) Per $a \rightarrow 0^+$ usiamo lo sviluppo

$$\arctan \sqrt{a} = \sqrt{a} - \frac{a^{3/2}}{3} + o(a^{3/2}), \quad \log(1 + a) = a - \frac{a^2}{2} + o(a^2).$$

Allora

$$2\sqrt{a} \arctan \sqrt{a} = 2a - \frac{2}{3}a^2 + o(a^2),$$

e dunque

$$I(a) = 2a - \frac{2}{3}a^2 - a + \frac{1}{2}a^2 + o(a^2) = a - \frac{1}{6}a^2 + o(a^2).$$

Segue

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{I(a)}{a} = 1.$$

Per $a \rightarrow +\infty$,

$$\frac{I(a)}{\sqrt{a}} = 2 \arctan \sqrt{a} - \frac{\log(1 + a)}{\sqrt{a}}.$$

Poiché

$$\arctan \sqrt{a} \rightarrow \frac{\pi}{2}, \quad \frac{\log(1 + a)}{\sqrt{a}} \rightarrow 0,$$

si ottiene

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{I(a)}{\sqrt{a}} = \pi.$$

Esercizio 3

Enunciato. Sia

$$P_n(x) = x^{n+2} - x^{n+1} - x^n - 1, \quad n \geq 1.$$

(a) Mostrare che per ogni $n \geq 1$ il polinomio P_n ammette un'unica radice positiva λ_n ; mostrare inoltre che $1 < \lambda_n < 2$.

(b) Mostrare che per ogni $n \geq 1$ si ha $\lambda_n \geq \lambda_*$, dove λ_* è la radice positiva del polinomio

$$P_*(x) = x^2 - x - 1.$$

(c) Mostrare che $\lambda_n \rightarrow \lambda_*$ per $n \rightarrow +\infty$.

Soluzione.

(a) Osserviamo che

$$P_n(1) = 1 - 1 - 1 - 1 = -2 < 0,$$

mentre

$$P_n(2) = 2^{n+2} - 2^{n+1} - 2^n - 1 = 2^n(4 - 2 - 1) - 1 = 2^n - 1 > 0,$$

per ogni $n \geq 1$. Per continuità, esiste almeno una radice positiva in $(1, 2)$.

Resta da dimostrare l'unicità. Osserviamo che

$$P'_n(x) = [(n+2)x^2 - (n+1)x - n]x^{n-1}.$$

Il fattore x^{n-1} è sempre positivo se $x > 0$ mentre il polinomio $(n+2)x^2 - (n+1)x - n$ ha due radici di segno opposto $r_{\pm}$ ed è negativo su $(0, r_+)$ e positivo su $(r_+, +\infty)$. Pertanto P_n non si annulla sull'intervallo $[0, r_+]$ in quanto $P_n(x) \leq P_n(0) = -1$ per ogni $x \in [0, r_+]$; d'altro canto P_n può avere al più uno zero su $(r_+, +\infty)$ in quanto è strettamente crescente su questo intervallo.

Pertanto la radice trovata nell'intervallo $(1, 2)$ deve essere l'unica radice positiva di P_n .

(b) Dato che

$$P_n(x) = x^n P_*(x) - 1,$$

è immediato verificare che $P_n(\lambda_*) = -1$ pertanto per il teorema degli zeri P_n deve avere una radice nell'intervallo $(\lambda_*, 2)$; dato che λ_n è l'unica radice positiva, $\lambda_n \in (\lambda_*, 2)$

(c) Osserviamo che $0 = P_n(\lambda_n) = \lambda_n^n P_*(\lambda_n) - 1$, e di conseguenza

$$P_*(\lambda_n) = \frac{1}{\lambda_n^n} \leq \frac{1}{\lambda_*^n}.$$

D'altronde, dato che P_* è convesso, si ha che per ogni $x \in \mathbb{R}$

$$P_*(x) \geq P_*(\lambda_*) + P'_*(\lambda_*)(x - \lambda_*) = \sqrt{5}(x - \lambda_*).$$

Usando questa ultima disuguaglianza con $x = \lambda_n$ (e tenendo conto di quanto visto sopra) otteniamo

$$0 < \sqrt{5}(\lambda_n - \lambda_*) \leq P_*(\lambda_n) \leq \frac{1}{\lambda_*^n}.$$

Di conseguenza $\lambda_n \rightarrow \lambda_*$ per $n \rightarrow +\infty$ (anzi, la differenza $\lambda_n - \lambda_*$ decresce in maniera geometrica).

Esercizio 4

Enunciato. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{1+x^2}, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

(a) Determinare esplicitamente la soluzione $y(x)$.

(b) Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x y(x)}{x}.$$

Soluzione.

(a) L'operatore differenziale a sinistra è

$$D^2 + 2D + 1 = (D + 1)^2.$$

Poiché il termine noto contiene il fattore e^{-x} , poniamo

$$y(x) = e^{-x}u(x).$$

Allora

$$y'(x) = e^{-x}(u'(x) - u(x)),$$

e

$$y''(x) = e^{-x}(u''(x) - 2u'(x) + u(x)).$$

Sostituendo nell'equazione,

$$y'' + 2y' + y = e^{-x}(u'' - 2u' + u) + 2e^{-x}(u' - u) + e^{-x}u = e^{-x}u''.$$

L'equazione diventa quindi

$$e^{-x}u''(x) = \frac{e^{-x}}{1+x^2},$$

ovvero

$$u''(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Le condizioni iniziali si traducono in condizioni su u . Da $y(0) = 0$ otteniamo

$$u(0) = 0.$$

Inoltre

$$y'(0) = u'(0) - u(0) = u'(0),$$

quindi

$$u'(0) = 1.$$

Integrando l'equazione $u''(x) = 1/(1+x^2)$ si ottiene

$$u'(x) = \arctan x + C.$$

La condizione $u'(0) = 1$ implica $C = 1$, dunque

$$u'(x) = 1 + \arctan x.$$

Integrando ancora,

$$u(x) = x + \int_0^x \arctan s \, ds,$$

dove abbiamo usato $u(0) = 0$. Ora

$$\int \arctan s \, ds = s \arctan s - \frac{1}{2} \log(1 + s^2).$$

Pertanto

$$u(x) = x + x \arctan x - \frac{1}{2} \log(1 + x^2).$$

La soluzione del problema di Cauchy è quindi

$$y(x) = e^{-x} \left(x + x \arctan x - \frac{1}{2} \log(1 + x^2) \right).$$

(b) Dalla formula esplicita,

$$\frac{e^x y(x)}{x} = \frac{x + x \arctan x - \frac{1}{2} \log(1 + x^2)}{x}.$$

Quindi

$$\frac{e^x y(x)}{x} = 1 + \arctan x - \frac{\log(1 + x^2)}{2x}.$$

Passando al limite per $x \rightarrow +\infty$,

$$\arctan x \rightarrow \frac{\pi}{2}, \quad \frac{\log(1 + x^2)}{2x} \rightarrow 0.$$

Di conseguenza

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x y(x)}{x} = 1 + \frac{\pi}{2}.$$