

Analisi matematica – Prova scritta n. 2

Corso di Laurea in Fisica

15 giugno 2026

Esercizio 1. Dire per quali $x \in \mathbb{R}$ la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\ln \frac{n+2}{n+1} \right) (1-x)^n$ converge.

Esercizio 2. Per $a > 0$ si consideri l'integrale

$$I(a) = \int_0^1 \frac{\log(1+ax^2)}{x^2} dx.$$

- (a) Mostrare che $I(a)$ è ben definito e derivabile per ogni $a > 0$.
- (b) Calcolare $I'(a)$.
- (c) Dedurre una formula esplicita per $I(a)$.
- (d) Calcolare

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{I(a)}{a}, \quad \lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{I(a)}{\sqrt{a}}.$$

Esercizio 3. Sia $P_n(x) = x^{n+2} - x^{n+1} - x^n - 1$ dove $n \geq 1$.

- (a) Mostrare che per ogni $n \geq 1$ il polinomio P_n ammette un'unica radice positiva λ_n ; mostrare inoltre che $1 < \lambda_n < 2$.
- (b) Mostrare che per ogni $n \geq 1$ si ha $\lambda_n \geq \lambda_*$ dove λ_* è la radice positiva del polinomio $P_*(x) = x^2 - x - 1$.
- (c) Mostrare che $\lambda_n \rightarrow \lambda_*$ per $n \rightarrow +\infty$.

Esercizio 4. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{1+x^2}, \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1. \end{cases}$$

- (a) Determinare esplicitamente la soluzione $y(x)$.
- (b) Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x y(x)}{x}.$$