

# Analisi matematica – Prova scritta n. 3

Corso di Laurea in Fisica

10 luglio 2026

## Esercizio 1.

Sia  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  definita come  $f(x) = \log \frac{1+e^x}{1-e^{-x}}$ .

- (a) Studiare la funzione  $f$ ; in particolare determinarne estremi sup e inf (specificando se si tratti di minimi o massimi), asintoti, e tracciarne un grafico qualitativo. [6 punti]
- (b) Mostrare che è possibile definire in modo ricorsivo la successione  $a_n$  che soddisfi [3 punti]

$$\begin{cases} a_0 = 1, \\ a_{n+1} = f(a_n), \end{cases}$$

e calcolare il limite di  $\{a_n\}$ .

## Esercizio 2.

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + \frac{2x}{1+x^2}y = \frac{1}{1+x^2}, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

- (a) Mostrare che la soluzione è definita su tutto  $\mathbb{R}$ . [2 punti]
- (b) Determinare esplicitamente la soluzione. [3 punti]
- (c) Calcolare [2 punti]

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x y(x).$$

- (d) Stabilire se  $y$  ammette massimo assoluto su  $[0, +\infty)$  e, in caso affermativo, determinarlo. [2 punti]

## Esercizio 3. Discutere la convergenza della serie

[6 punti]

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sin(n^2) \sin \frac{1}{n^2}.$$

## Esercizio 4. Si consideri il seguente integrale improprio dipendente da un parametro $\alpha > 0$ :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos 3x - \cos 2x}{x^\alpha} dx.$$

- (a) Dire per quali  $\alpha$  l'integrale è convergente. [5 punti]
- (b) Dire per quali  $\alpha$  l'integrale è assolutamente convergente. [3 punti]
- (c) Calcolare l'integrale per  $\alpha = 1$ . [2 punti]