Il teorema di invertibilità locale e il teorema del Dini per i sistemi

E. Paolini

30 ottobre 2021

Teorema 1 (disuguaglianza di Cauchy-Schwarz vettoriale). *Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}^m$ una funzione integrabile. Allora*

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \le \int_a^b |f(t)|\,dt.$$

Dimostrazione. Poniamo $v = \int_a^b f(t)\,dt$. Allora si ha

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(t)\,dt\right|\,|v| &= \left|\left(\int_a^b f(t)\,dt, v\right)\right| = \left|\int_a^b (f(t), v)\,dt\right| \\ &\le \int_a^b |f(t)|\,|v|\,dt = \int_a^b |f(t)|\,dt\,|v|.\end{aligned}$$

Se fosse $v = 0$ il teorema sarebbe ovvio, in caso contrario si può semplificare $|v|$ nella precedente catena di disuguaglianze, ottenendo quindi la tesi. □

Teorema 2 (disuguaglianza di Cauchy-Schwarz matriciale). *Sia $A\colon [a,b] \to M^{m\times n}$ una funzione integrabile a valore matrici. Allora*

$$\left\|\int_a^b A(t)\,dt\right\| \le \int_a^b ||A(t)||\,dt.$$

Dimostrazione. Poniamo $\bar{A} = ||\int_a^b A(t)\,dt||$ e sia $\bar{v}$ tale che $||\bar{v}|| \le 1$ e $||\bar{A}|| = |\bar{A}\bar{v}|$. Allora si ha

$$\begin{aligned}\left\|\int_a^b A(t)\,dt\right\| &= \left|\int_a^b A(t)\,dt\,\bar{v}\right| = \left|\int_a^b A(t)\,\bar{v}\,dt\right| \\ &\le \int_a^b |A(t)\,\bar{v}|\,dt \le \int_a^b ||A(t)||\,dt.\end{aligned}$$

□

Teorema 3 (criterio di Lipschitz). *Sia $f\colon \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una funzione di classe $\mathcal{C}^1$ definita su un insieme convesso Ω e supponiamo che si abbia $L = \sup_{x\in\Omega} \|Df(x)\| < +\infty$. Allora la funzione f è L-Lipschitziana, ossia*

$$|f(x') - f(x)| \le L|x' - x| \qquad \forall x, x' \in \Omega.$$

Dimostrazione. Siano $x, x' \in \Omega$ fissati e consideriamo la funzione $g(t) = f(tx' + (1-t)x)$. Chiaramente $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}^m$ è di classe $\mathcal{C}^1$ e si ha

$$g'(t) = Df(tx' + (1-t)x)\,(x' - x).$$

Dalla formula fondamentale del calcolo integrale si ottiene

$$f(x') - f(x) = g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(t)\, dt = \int_0^1 Df(tx' + (1-t)x)\, dt\, (x' - x)$$

da cui segue

$$|f(x') - f(x)| \le \int_0^1 \|Df(tx' + (1-t)x)\|\, dt\, |x' - x| \le L|x' - x|$$

come volevasi dimostrare. □

Teorema 4 (inversione locale)**.** *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$, $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$, sia $x_0 \in \Omega$ e supponiamo che $Df(x_0)$ sia una matrice invertibile. Allora esiste un intorno aperto U di x_0 e un intorno aperto V di $f(x_0)$ per cui $f(U) = V$ e*

$$f_{|U} \colon U \to V$$

è bigettiva, la sua inversa $f^{-1} \colon V \to U$ è differenziabile e se $f(x) = y$ (con $x \in U$) si ha

$$D(f^{-1}(y)) = (Df(x))^{-1}.$$

Dimostrazione. Consideriamo la matrice $A = (Df(x_0))^{-1}$. Siccome Ω è aperto e $Df \colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ è continuo, possiamo scegliere $\rho > 0$ in modo che

$$\overline{\mathbb{B}_\rho(x_0)} \subset \Omega \qquad \text{e} \qquad \|Df(x) - Df(x_0)\| \le \frac{1}{2\|A\|} \quad \forall x \in \overline{\mathbb{B}_\rho(x_0)}.$$

Poniamo $r = \frac{\rho}{2\|A\|}$ e $y_0 = f(x_0)$. Fissato $y \in \mathbb{B}_r(y_0)$ consideriamo l'applicazione

$$\begin{aligned} T \colon \overline{\mathbb{B}_\rho(x_0)} &\to \mathbb{R}^n \\ T(x) &= x + A(y - f(x)). \end{aligned}$$

Si ha, per $x \in \overline{\mathbb{B}_\rho(x_0)}$, (ricordiamo che $\mathrm{id} = A\, Df(x_0)$)

$$\|DT(x)\| = \|\mathrm{id} - A\, Df(x)\| \le \|A\| \cdot \|Df(x_0) - Df(x)\| \le \frac{1}{2}$$

e quindi, per il criterio di Lipschitz, la funzione T è $\frac{1}{2}$-Lipschitziana (ossia una contrazione).

Verifichiamo anche che $T(\overline{\mathbb{B}_\rho(x_0)}) \subset \overline{\mathbb{B}_\rho(x_0)}$. Infatti, per $x \in \overline{\mathbb{B}_\rho(x_0)}$, si ha

$$\begin{aligned} |T(x) - x_0| &\le |T(x) - T(x_0)| + |T(x_0) - x_0| \\ &\le \frac{1}{2}|x - x_0| + |A(y - y_0)| \le \frac{\rho}{2} + \|A\| r = \rho. \end{aligned}$$

Dunque $T \colon \overline{\mathbb{B}_\rho(x_0)} \to \overline{\mathbb{B}_\rho(x_0)}$ è una contrazione, $\overline{\mathbb{B}_\rho(x_0)}$ è uno spazio metrico completo e quindi, per il Teorema delle contrazioni, esiste un unica soluzione dell'equazione

$$T(x) = x.$$

Dato $y \in \mathbb{B}_r(y_0)$ possiamo dunque trovare un unico $x \in \overline{\mathbb{B}_\rho(x_0)}$ che risolve $f(x) = y$, chiamiamo g l'applicazione $y \mapsto x$

$$g \colon \mathbb{B}_r(y_0) \to \overline{\mathbb{B}_\rho(x_0)}, \qquad f(g(y)) = y.$$

Consideriamo ora l'insieme $\Sigma = f(\partial B_\rho(x_0))$. Essendo f continua sappiamo che Σ è compatto. Inoltre $y_0 \notin \Sigma$ in quanto c'è un unico punto $x \in \overline{B_\rho(x_0)}$ per cui $f(x) = y_0$ e tale punto è x_0. Dunque $V = B_r(y_0) \setminus \Sigma$ è aperto. Posto $U = g(V)$ risulta quindi che $f_{|U} \colon U \to V$ è bigettiva e ha g come inversa. Inoltre per costruzione abbiamo evitato che U possa contenere punti di $\partial\mathbb{B}_\rho(x_0)$ e dunque risulta $U \subset \mathbb{B}_\rho(x_0)$.

Vogliamo ora mostrare che U è aperto. Dato un qualunque $x \in U$ poniamo $y = f(x)$. Visto che $U = g(V)$ sappiamo che $y \in V$. Siccome V è aperto esiste $\varepsilon > 0$ tale che $\mathbb{B}_\varepsilon(y) \subset V$ ed essendo f continua possiamo trovare $\delta > 0$ tale che $f(\mathbb{B}_\delta(x)) \subset \mathbb{B}_\varepsilon(y) \subset V$. Essendo inoltre $x \in U \subset \mathbb{B}_\rho(x_0)$, pur di rimpicciolire ulteriormente δ possiamo supporre anche che $\mathbb{B}_\delta(x) \subset B_\rho(x_0)$. Risulta dunque che $f(B_\delta(x)) \subset V$ da cui $B_\delta = g(f(B_\delta)) \subset U$. Dunque U contiene un'intorno di ogni suo punto, ed è dunque aperto.

Vogliamo ora dimostrare che g è differenziabile in ogni punto $y \in \mathbb{B}_r(y_0)$ e che il suo differenziale $Dg(y)$ è uguale a $Df(x)^{-1}$ con $x = g(y)$; ossia

$$\lim_{y' \to y} \frac{g(y') - g(y) - Df(x)^{-1}(y' - y)}{|y' - y|} = 0.$$

Dato $y' \in \mathbb{B}_r(y_0)$, posto $x' = g(y')$ stiamo considerando la seguente quantità

$$\frac{g(y') - g(y) - Df(x)^{-1}(y' - y)}{|y' - y|} = \frac{x' - x - Df(x)^{-1}(f(x') - f(x))}{|y' - y|}$$

che per la differenziabilità di f in x possiamo scrivere come

$$\begin{aligned} &= \frac{x' - x - Df(x)^{-1}(Df(x)(x' - x) + o(|x' - x|))}{|y' - y|} \\ &= \frac{Df(x)^{-1}o(|x' - x|)}{|y' - y|} = \frac{Df(x)^{-1}o(|x' - x|)}{|x' - x|} \cdot \frac{|x' - x|}{|y' - y|}. \end{aligned} \tag{1}$$

Vogliamo ora dimostrare che per $y' \to y$ si ha $x' \to x$ cosicché il primo termine di quest'ultimo prodotto tende a zero per la definizione di o "piccolo". Contemporaneamente dimostreremo che il secondo termine è limitato.

Per fare questo consideriamo la mappa T definita in precedenza e per la quale si ha $T(x) = x$. Ricordando che T è 1/2-lipschitziana si ha

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}|x' - x| &\geq |T(x') - T(x)| = |x' + A(y - f(x')) - x| \\ &\geq |x' - x| - |A(y - f(x'))| = |x' - x| - \|A\||y - y'| \end{aligned} \tag{2}$$

da cui

$$|x' - x| \leq 2\|A\|\, |y' - y|.$$

Questo da un lato ci dice che se $y' \to y$ allora anche $x' \to x$ e dall'altro ci dice che il rapporto $|x' - x|/|y' - y|$ è limitato. Dunque la quantità in (1) tende a zero, la funzione g è differenziabile in y e il suo differenziale è $Dg(y) = Df(x)^{-1}$.

Per concludere che $g \in \mathcal{C}^1$ rimane solo da provare che il differenziale Dg è una funzione continua. Ma dato che $Dg(y) = Df(g(y))^{-1}$, si osserva che essendo g continua (in quanto differenziabile), essendo Df continua (per ipotesi) ed essendo continua anche l'operazione di inversione di una matrice, la funzione Dg deve essere continua. □

Teorema 5 (Dini, funzione implicita)**.** *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ e sia $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^m)$. Sia $(x_0, y_0) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Se la matrice $D_y f(x_0, y_0)$ delle derivate di $f(x, y)$ rispetto alle variabili y*

$$D_y f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f^j}{\partial y^k}(x_0, y_0)\right)_{j,k} \qquad j = 1, \ldots, m \quad k = 1, \ldots, m$$

è invertibile, allora esiste un intorno $U \subset \mathbb{R}^n$ di x_0 e una funzione $g \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^m)$ tale che

$$f(x, g(x)) = f(x_0, y_0) \qquad \forall x \in U.$$

Inoltre, per $y = g(x)$ si ha

$$Dg(x) = -D_y f(x, y)^{-1} D_x f(x, y).$$

Dimostrazione. Consideriamo la funzione $\tilde{f} \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$

$$\tilde{f}(x, y) = (x, f(x, y)).$$

si trova facilmente che

$$D\tilde{f}(x, y) = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{id} & 0 \\ \hline D_x f & D_y f \end{array} \right)$$

dove id è la matrice identità $n \times n$. Dunque essendo $D_y f(x_0, y_0)$ invertibile, anche $D\tilde{f}(x_0, y_0)$ lo è e posso applicare il teorema di invertibilità locale a $\tilde{f}$. Dunque esisterà una funzione $\tilde{g}$ di classe $\mathcal{C}^1$ in un intorno di $(x_0, f(x_0, y_0)$ tale che $\tilde{f}(\tilde{g}(x, y)) = (x, y)$. Posto $\tilde{g}(x, y) = (g_1(x, y), g_2(x, y))$ con g_1 a valori in $\mathbb{R}^n$, e g_2 a valori in $\mathbb{R}^m$ si ha dunque

$$(x, y) = \tilde{f}(g_1(x, y), g_2(x, y)) = (g_1(x, y), f(g_1(x, y), g_2(x, y)))$$

da cui si ottiene $g_1(x, y) = x$ e $f(x, g_2(x, y)) = y$. Basterà dunque porre $g(x) = g_2(x, f(x_0, y_0))$ per ottenere $f(x, g(x)) = f(x_0, y_0)$.

Per dimostrare la formula di calcolo di Dg è sufficiente calcolare le derivate rispetto a x dell'equazione

$$f(x, g(x)) = f(x_0, y_0)$$

per ottenere

$$D_x f(x, g(x)) + D_y f(x, g(x)) Dg(x) = 0$$

da cui la tesi. $\square$