UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI FIRENZE
Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

Anno accademico 2006/2007

Relazione finale

di Guido de Philippis

Una dimostrazione della minimalità dei Coni di Simons

relatore: Emanuele Paolini

Introduzione

In matematica il problema di determinare quali superfici siano di area minima e di studiarne le proprietà risale ai tempi di Lagrange. Risultati riguardanti la regolarità di tali oggetti, in codimensione uno, sono invece molto più recenti. Solo all'inizi del '900 si è dimostrato, usando tecniche di analisi complessa e pertanto non estendibili a dimensioni superiori, la regolarità delle superfici minime in $\mathbb{R}^3$. Negli anni '60 invece il problema, almemo in codimensione uno, è stato completamente risolto arrivando al sorprendente risultato dell'esistenza di superfici minime singolari in dimensione alta. Più esattamente si può dimostrare che la dimensione dell'insieme singolare è minore o uguale a $n-8$ dove n è la dimensione dello spazio ambiente e che questa stima risulta essere ottimale (ossia che esistono superfici per cui si ottiene l'uguaglianza).

Il primo punto da affrontare nello studio delle superfici di area minima è stabilire delle definizioni di superficie e di area, o meglio di misura $(n-1)$-dimensionale, sufficientemente elastiche per potervisi approcciare con i metodi classici del calcolo delle variazioni. In questa tesina seguiremo l'approccio di Caccioppoli e De Giorgi per cui le superfici $(n-1)$-dimensionali sono definite come bordi di insiemi $E \subseteq \mathbb{R}^n$, mentre l'area viene definita come la variazione totale della misura vettoriale $D\chi_E$, ossia della derivata distribuzionale della funzione caratteristica di E. In questo ambito si hanno teoremi di compattezza e semicontinuità del tutto soddisfacenti per provare l'esistenza di superfici di area minima (impropriamente chiameremo l'insieme E, di cui la superficie é bordo, minimo); sorge a questo punto il problema della regolarità di tali oggetti.

Lo stesso De Giorgi ha provato, si veda [6] [1], l'equivalenza tra l'esistenza di superfici minime singolari e quella di coni minimi singolari. Simons ha quindi dimostrato, si veda [6] [8], che per $n \leq 7$ non possono esistere coni minimi singolari in $\mathbb{R}^n$ e pertanto che ogni superfice minima in $\mathbb{R}^n$ per $n \leq 7$ è regolare. La sua dimostrazione falliva per i coni

$$C_m := \{(x,y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \mid |x| \geq |y|\} \qquad m \geq 4$$

di cui egli sospettava la minimalità .

Nel 1969 Bombieri, De Giorgi, Giusti hanno provato in [2] per la prima volta la minimalità di tali insiemi. In seguito Miranda e Massari ne hanno dato in [7] una dimostrazione più semplice.

In questa tesina riprendendo alcune idee tratte da [8] daremo un'altra dimostrazione di questo risultato; sostanzialmente divideremo le deformazioni degli insiemi in questione in deformazioni dall'interno e dall'esterno introducendo, in analogia alla nozione di subsoluzione e di soprasoluzione di un'equazione differenziale, quella di subminimo e di superminimo. Mostreremo poi che il cono C_m è, per m maggiore di quattro, sia un subminimo che un supermnimo e quindi un minimo. Il vantaggio di questo approccio, che sostanzialmente è una generalizzazione dei metodi di calibrazione e foliazione, è la sua generalità che ne permette applicazioni anche ad altri casi; la difficoltà, come per i metodi precedenti, è che comunque non si hanno a priori indizi su quali possano essere gli insiemi giusti da utilizzare per approssimare il minimo.

La tesina è divisa in due sezioni, nella prima daremo alcuni risultati generali sugli insiemi di perimetro localmente finito, verranno introdotte le nozioni di subminimo e di superminimo e dimostrati alcuni risultati preliminari, mentre nella seconda questo metodo verrà applicato al caso specifico dei coni.

Vorrei infine ringraziare il mio relatore Emanuele Paolini per la sua disponibilità, per avermi proposto un argomento semplice ma elegante, che si è rivelato avere connessioni con risultati molto più complessi e profondi, e per avermi introdotto a questo bellissimo campo della matematica.

Definizioni e risultati preliminari

Iniziamo questa sezione dando alcune definizioni ed enunciando alcune proprietà basilari degli insiemi di perimetro localmente finito; per una trattazione più approfondita e per le dimostrazioni non riportate si rimanda a [6] [1], introduciamo inoltre il concetto di subminimo e di superminimo.

Innanzitutto si danno le seguenti:

Definizione 1. Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ misurabile, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, definiamo il perimetro di E in Ω nella seguente maniera:

$$P(E,\Omega) := \sup\{\int_E \operatorname{div} \varphi \, dx : \varphi \in \mathcal{C}_0^1(\Omega,\mathbb{R}^n), |\varphi| \leq 1\}$$

Dove con $\mathcal{C}_0^1(\Omega,\mathbb{R}^n)$ abbiamo indicato i campi vettoriali di classe $\mathcal{C}^1$ a supporto compatto in Ω.

Osservazione 2. Se E è un insieme con fontiera di classe $\mathcal{C}^2$, ossia tale che la sua frontiera si può rappresentare localmente come l'insieme di zeri di una funzione di classe $\mathcal{C}^2$ con gradiente non nullo, allora utilizzando il teorema della divergenza ([5, pag 665]):

$$P(E,\Omega) = \mathcal{H}^{n-1}(\partial E \cap \Omega)$$

dove $\mathcal{H}^{n-1}$ rappresenta la misura di Haussdorf $(n-1)$-dimensionale, che coincide in questo caso con la misura di superficie definita dalla geometria differenziale.

Definizione 3. Diremo che E è un insieme di perimetro localmente finito o di Caccioppoli in Ω se:

$$P(E,A) < +\infty \qquad \forall A \subset\subset \Omega,\ A \text{ aperto}$$

Definizione 4. Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ di Caccioppoli, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, diremo che E ha perimetro localmente minimo in Ω se vale per ogni aperto A, $A \subset\subset \Omega$:

$$P(E,A) \leq P(F,A) \qquad \forall\ F \text{ t. c. } E \triangle F \subset\subset A$$

Dove col simbolo $A \subset\subset \Omega$ intendiamo che la chiusura di A è un compatto contenuto in Ω.

Le successive proposizioni rappresentano alcune utili proprietà degli insiemi di Caccioppoli, per le dimostrazioni si veda ad esempio [6]:

Proposizione 5 (Semicontinuità inferiore del perimetro)**.** *Sia E_k una successione di insiemi misurabili tali che $E_k \to E$ in $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ allora vale per ogni aperto A:*

$$P(E,A) \leq \liminf_{k\to\infty} P(E_k,A)$$

Proposizione 6. *Siano E ed F due insiemi misurabili allora vale per ogni aperto A:*

$$P(E \cup F, A) + P(E \cap F, A) \leq P(E, A) + P(F, A) \tag{1}$$

Facilmente dalla definizione di perimetro discende anche il seguente lemma che ci sarà utile in seguito:

Lemma 7. *Sia E un insieme misurabile e K un compatto tale che $\overline{E} \cap K = \emptyset$ allora per ogni aperto Ω:*

$$P(E, \Omega) = P(E, \Omega \setminus K)$$

Formalizziamo ora il concetto di insiemi minimi per deformazioni dall'interno e dall'esterno:

Definizione 8. Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ di Caccioppoli, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, diremo che E è un *subminimo* in Ω se vale per ogni aperto A, $A \subset\subset \Omega$:

$$P(E, A) \leq P(F, A) \qquad \forall\ F \subseteq E \text{ t. c. } E \setminus F \subset\subset A$$

Definizione 9. Sia $G \subseteq \mathbb{R}^n$ di Caccioppoli, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, diremo che G è un *superminimo* in Ω se vale per ogni aperto A, $A \subset\subset \Omega$:

$$P(G, A) \leq P(F, A) \qquad \forall\ F \supseteq G \text{ t. c. } F \setminus G \subset\subset A$$

Ossia se e solo se $\mathbb{R}^n \setminus G$ è un subminimo in Ω.

Mostriamo ora come in analogia a quanto avviene per le subsoluzioni e le soprasoluzioni di equazioni differenziali essere contemporaneamente un subminimo ed un superminimo è condizione necessaria e sufficiente per essere un minimo:

Proposizione 10. *Sia E di Caccioppoli, allora E è minimo in Ω se e solo se E è un subminimo ed un superminimo.*

Dimostrazione. Ovviamente se E è minimo è sia un subminimo che un superminimo. Dimostriamo ora l'altra implicazione: sia A aperto ed F tale che $E \triangle F \subset\subset A \subset\subset \Omega$ allora vale ovviamente che $E \cap F \subseteq E \subseteq E \cup F$ e inoltre $(E \cup F) \setminus E = F \setminus E \subset\subset A$ e $E \setminus (E \cap F) = E \setminus F \subset\subset A$ pertanto per le definizioni 8 e 9 si ha:

$$P(E, A) \leq P(E \cup F, A) \qquad \text{e} \qquad P(E, A) \leq P(E \cap F, A)$$

sommando membro a membro e usando la (1):

$$2P(E, A) \leq P(E \cup F, A) + P(E \cap F, A) \leq P(E, A) + P(F, A)$$

e pertanto la tesi. □

A questo punto il problema è come determinare se un insieme è un subminimo o un superminimo, i seguenti teoremi hanno questo scopo:

Teorema 11. *Sia E_k una successione di insiemi misurabili tali che:*

(i) E_k *é subminimo in* Ω *per ogni* k *in* $\mathbb{N}$

(ii) $E_k \subseteq E$ *per ogni* k *in* $\mathbb{N}$

(iii) $E_k \to E$ *in* $L^1_{loc}(\Omega)$

allora vale che E *è un subminimo in* Ω*.*

Dimostrazione. Sia A aperto, $F \subseteq E$ tale che $E \setminus F \subset\subset A \subset\subset \Omega$ siccome $E = E \cup F$ si ha che $E_k \cup F \to E$ e quindi per la (1) e la semicontiniutà inferiore del perimetro:

$$\begin{aligned} P(E, A) &\leq \liminf_{k\to\infty} P(E_k \cup F, A) \leq \liminf_{k\to\infty} \{P(E_k, A) + P(F, A) - P(E_k \cap F, A)\} \\ &\leq P(F, A) \end{aligned}$$

dove nell'ultima maggiorazione abbiamo usato il fatto che gli E_k sono subminimi e che $E_k \setminus (E_k \cap F) \subseteq E \setminus F \subset\subset A$. $\square$

Si osservi come l'ipotesi 2 è necessaria per garantire che le deformazioni $E_k \cap F$ siano a supporto compatto in A. Ovviamente passando al complementare vale il seguente:

Teorema 12. *Sia* G_k *una successione di insiemi misurabili tali che:*

- *(i)* G_k *é superminimo in* Ω *per ogni* k *in* $\mathbb{N}$
- *(ii)* $G_k \supseteq G$ *per ogni* k *in* $\mathbb{N}$
- *(iii)* $G_k \to G$ *in* $L^1_{loc}(\Omega)$

allora vale che G *è un superminimo in* Ω*.*

Dimostrazione. Basta considerare la successione $E_k := \mathbb{R}^n \setminus G_k$ che soddisfa le ipotesi del teorema precedente per mostrare che $E := \mathbb{R}^n \setminus G$ è un subminimo in Ω e che, pertanto, G è un superminimo. $\square$

I seguenti teoremi utilizzano un metodo analogo a quello di calibrazione, si veda ad esempio [3]:

Teorema 13. *Sia* E *un insieme misurabile con frontiera* $\mathcal{C}^2$*,* Ω *aperto, e supponiamo esista un campo* $\xi \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ *che soddisfi le seguenti condizioni:*

- *(i)* $\xi_{|\partial E} = \nu_E$ *dove* ν_E *è la normale esterna ad* E
- *(ii)* $\operatorname{div} \xi(x) \leq 0 \quad \forall x \in E \cap \Omega$
- *(iii)* $|\xi(x)| \leq 1 \quad \forall x \in \Omega$

allora E *è un subminimo in* Ω*.*

Dimostrazione. Sia A aperto, $F \subseteq E$ tale che $E \setminus F \subset\subset A \subset\subset \Omega$ e sia K_j una successione di compatti che soddisfa:

1. $E \setminus F \subseteq K_j \quad \forall\, j$
2. $K_j \subseteq K_{j+1} \subset A$ e $K_j \to A$

ad esempio $K_j := \{x \in A \mid d(x, \partial A) \geq \frac{1}{j}\} \cup \overline{E \setminus F}$ e per ogni $j \in \mathbb{N}$ sia $\eta_j \in \mathcal{C}_0^1(A)$ una funzione tale che $0 \leq \eta_j \leq 1$, $\eta_j \equiv 1$ su K_j. Ponendo $\xi_j = \eta_j \xi$ si ha allora:

$$\int_E \operatorname{div} \xi_j \, dx - \int_F \operatorname{div} \xi_j \, dx = \int_{E \setminus F} \operatorname{div} \xi_j \, dx = \int_{E \setminus F} \operatorname{div} \xi \, dx \leq 0$$

pertanto:

$$\int_E \operatorname{div} \xi_j \, dx \leq \int_F \operatorname{div} \xi_j \, dx$$

ora il secondo membro si maggiora con $P(F, A)$ mentre per il primo utilizzando il Teorema della divergenza si ottiene:

$$\begin{aligned} \int_E \operatorname{div} \xi_j \, dx &= \int_{\partial E \cap A} \eta_j \langle \xi, \nu_E \rangle \, d\mathcal{H}^{n-1} = \\ &= \int_{\partial E \cap A} \eta_j \langle \nu_E, \nu_E \rangle \, d\mathcal{H}^{n-1} \geq \mathcal{H}^{n-1}(\partial E \cap K_j) \end{aligned}$$

quindi passando al limite per j che tende all'infinito e ricordando l'osservazione 2 si ha che:

$$P(E, A) = \mathcal{H}^{n-1}(\partial E \cap A) = \lim_{j \to \infty} \mathcal{H}^{n-1}(\partial E \cap K_j) \leq P(F, A)$$

$\square$

Applicando il teorema precedente a $\mathbb{R}^n \setminus G$ utilizzando il campo $\xi(x) = -\eta(x)$ si ha:

Teorema 14. *Sia G un insieme misurabile con frontiera $\mathcal{C}^2$, Ω aperto, e supponiamo esista un campo $\eta \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ che soddisfi le seguenti condizioni:*

(i) $\eta_{|\partial G} = \nu_G$ *dove ν_G é la normale esterna ad G*

(ii) $\operatorname{div} \eta(x) \geq 0 \quad \forall x \in \Omega \setminus G$

(iii) $|\eta(x)| \leq 1 \quad \forall x \in \Omega$

allora G è un superminimo in Ω.

Nella prossima sezione utilizzeremo anche i seguenti lemmi:

Lemma 15. *Sia E un subminimo in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ allora se $0 \notin \overline{E}$ vale che E è un subminimo in $\mathbb{R}^n$.*

Dimostrazione. Sia A un aperto tale che $A \subset\subset \mathbb{R}^n$ e sia $F \subseteq E$ tale che si abbia $E \setminus F \subset\subset A$. Siccome $0 \notin \overline{E}$ allora esiste $\varrho > 0$ tale che $\overline{B_\varrho(0)} \cap \overline{E} = \emptyset$. Sia ora $A' := A \setminus \overline{B_\varrho(0)}$ allora $A' \subset\subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e, per l'ipotesi su E, $E \setminus F \subset\subset A'$. Quindi ricordando il lemma 7 con $\Omega = A$ e $K = \overline{B_\varrho(0)}$ ed il fatto che E è un subminimo in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ si ha:

$$P(E, A) = P(E, A') \leq P(F, A') = P(F, A)$$

ossia la tesi. $\square$

Come sempre passando al complementare si ha:

Lemma 16. *Sia G un superminimo in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ allora se $0 \in \overset{\circ}{G}$ vale che G è un superminimo in $\mathbb{R}^n$.*

I coni

Veniamo ora a dimostrare la minimalità del cono C_m per $m \geq 4$; questo verrà fatto, come già detto, mostrando che è limite di subminimi dall'interno e di superminimi dall'esterno. Più precisamente consideriamo la seguente funzione:

$$F(x,y) = \frac{1}{4}(|x|^4 - |y|^4), \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$$

e definiamo i seguenti insiemi:

$$E_k := \{(x,y) \mid F(x,y) \geq \frac{1}{k}\},$$
$$G_k := \{(x,y) \mid F(x,y) \geq -\frac{1}{k}\}.$$

Innanzitutto osserviamo che:

$$C_m := \{(x,y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \mid |x| \geq |y|\} = \{(x,y) \mid F(x,y) \geq 0\}.$$

Vogliamo ora dimostrare che gli insiemi E_k e G_k soddisfano le ipotesi dei teoremi 11 e 12 con $E = G = C_m$ e $\Omega = \mathbb{R}^n$. L'ipotesi 2 è banalmente soddisfatta, per quanto riguarda la convergenza in L^1_{loc} basta osservare che $C_m = \cup_k E_k = \cap_k G_k$ e pertanto per ogni compatto K vale:

$$\lim_{k\to\infty} |(C_m \triangle E_k) \cap K| = \lim_{k\to\infty} |(C_m \triangle G_k) \cap K| = 0.$$

Rimane solo da mostrare che questi insiemi sono, rispettivamente, dei subminimi e dei superminimi in $\mathbb{R}^{2m}$. Per ottenere ciò, ricordando i lemmi 15 e 16, basta mostrare che lo sono in $\mathbb{R}^{2m} \setminus \{0\}$. Questo lo faremo applicando i teoremi 13 e 14 al campo $\xi(x) = \eta(x) := -\frac{DF}{|DF|}(x)$ con $\Omega = \mathbb{R}^{2m} \setminus \{0\}$. Le ipotesi 1 e 3 sono ovviamente soddisfatte, è sufficiente quindi far vedere (si osservi il meno!) che la divergenza di $\frac{DF}{|DF|}$ é positiva in C_m e negativa nel complementare. Con un calcolo diretto si dimostra il seguente:

Lemma 17. *Sia* $\varphi(u,v) = \big(\varphi^1(u,v), \varphi^2(u,v)\big)$ *e definiamo per* $(x,y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \setminus \{(0,0)\}$ $\tilde{\varphi}(x,y) = \Big(\varphi^1(|x|,|y|)\frac{x}{|x|}, \varphi^2(|x|,|y|)\frac{y}{|y|}\Big)$ *allora vale:*

$$\operatorname{div} \tilde{\varphi}(x,y) = \operatorname{div} \varphi(u,v) + (m-1)\left(\frac{\varphi^1(u,v)}{u} + \frac{\varphi^2(u,v)}{v}\right)$$

dove abbiamo posto $u = |x|$ *e* $v = |y|$.

Dimostrazione.

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\varphi^1(|x|,|y|)\frac{x_i}{|x|}\right) = \varphi^1_u \frac{x_i^2}{|x|^2} + \varphi^1\left(\frac{1}{|x|} - \frac{x_i^2}{|x|^3}\right) \quad \text{per } i = 1 \ldots m$$

e

$$\frac{\partial}{\partial y_j}\left(\varphi^2(|x|,|y|)\frac{y_j}{|y|}\right) = \varphi^2_v \frac{y_j^2}{|y|^2} + \varphi^2\left(\frac{1}{|y|} - \frac{y_j^2}{|y|^3}\right) \quad \text{per } j = 1 \ldots m$$

e sommando si ha la tesi. □

Nel nostro caso posto $f(u,v) = \frac{1}{4}(u^4 - v^4)$ si ha $F(x,y) = f(|x|,|y|)$ e

$$F_{x_i} = f_u \frac{x_i}{|x|} \qquad F_{y_j} = f_v \frac{y_j}{|y|}$$

quindi $|DF| = |Df|$ e:

$$\frac{DF}{|DF|} = \frac{1}{|Df|}\left(f_u \frac{x}{|x|}, f_v \frac{y}{|y|}\right)$$

pertanto applicando il lemma 17 ed eseguendo alcune semplificazioni si ha:

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\left(\frac{DF}{|DF|}\right) &= \operatorname{div}\left(\frac{Df}{|Df|}\right) + \frac{(m-1)}{|Df|}\left(\frac{f_u}{u} + \frac{f_v}{v}\right) = \\
&= \frac{1}{|Df|}\Delta f - \frac{1}{|Df|^3}\langle Df, \mathcal{H}f \cdot Df\rangle + \frac{(m-1)}{|Df|}\left(\frac{f_u}{u} + \frac{f_v}{v}\right) = \\
&= \frac{1}{|Df|^3}\left(f_{vv}f_u^2 + f_{uu}f_v^2 - 2f_{uv}f_u f_v + (m-1)(f_u^2 + f_v^2)\left(\frac{f_u}{u} + \frac{f_v}{v}\right)\right)
\end{aligned}$$

ora nel nostro caso:

$$f_u = u^3 \qquad f_v = -v^3 \qquad f_{uu} = 3u^2 \qquad f_{vv} = -3v^3 \qquad\qquad f_{uv} = 0$$

e sostituendo:

$$\begin{aligned}
|DF|^3 \operatorname{div}\left(\frac{DF}{|DF|}\right) &= 3u^2v^6 - 3u^6v^2 + (m-1)(u^6+v^6)(u^2-v^2) = \\
&= 3u^2v^2(u^2+v^2)(u^2-v^2) + (m-1)(u^6+v^6)(u^2-v^2) = \\
&= (u^2-v^2)(u^2+v^2)\big((m-1)(u^4+v^4-u^2v^2) - 3u^2v^2\big)
\end{aligned}$$

ricordando la definizione di C_m si tratta quindi di mostrare che:

$$(m-1)(u^4+v^4) - (m+2)u^2v^2 \geq 0 \qquad \forall\, u,v \geq 0$$

ossia, posto $t = \left(\frac{u}{v}\right)^2$, che:

$$(m-1)t^2 - (m+2)t + (m-1) \geq 0 \qquad \forall\, t \geq 0$$

ma questo é vero se e solo se (supponendo $m \geq 1$):

$$\Delta = (m+2)^2 - 4(m-1)^2 \leq 0$$

ovvero se e solo se $m \geq 4$. Abbiamo così dimostrato il seguente:

Teorema 18. *Sia $C_m = \{(x,y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \,|\, |x| \geq |y|\}$ se $m \geq 4$ allora C_m è di perimetro minimo.*

Riferimenti bibliografici

[1] L. Ambrosio, Corso introduttivo alla Teoria Geometrica della Misura ed alle Superfici Minime, Scuola Normale Superiore, Pisa, 1997

[2] E. Bombieri, E. De Giorgi, E. Giusti, Minimal Cones and the Bernstein Problem, Inv. Math. 7, 1969, 243-268

[3] A. Davini, On Calibrations for Lawson's Cones Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. 111, 2004, 55-70.

[4] G. Folland, Real Analysis Modern techniques and their applications, 2nd edition, Wiley-Interscience, New york, 1999

[5] N. Fusco, P. Marcellini, C. Sbordone, Analisi matematica 2, Liguori, Napoli, 1996

[6] E. Giusti, Minimal Surfaces and Function of Bounded Variation, Birkhäuser, Boston, 1984

[7] U. Massari e M. Miranda, A Remark on Minimal Cones, Boll. Un. Mat Ital. (6) 2-A, 1983, 123-125

[8] M. Miranda, Superfici Minime ed il Problema di Plateu, Quaderni dell'Universitá di Lecce, Lecce, 2006