



UNIVERSITÀ DI PISA

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA

Corso di Laurea Triennale in Matematica

**Il Teorema di compatezza concentrata  
ed Esistenza di cluster isoperimetrici**

Relatore

**Prof. Emanuele Paolini**

Candidata

**Maria Vittoria Fiorini**

---

ANNO ACCADEMICO 2024/2025

*“Le creature di fuori guardavano dal maiale all’uomo  
e dall’uomo al maiale e ancora dal maiale all’uomo,  
ma già era loro impossibile distinguere fra i due.”*

*George Orwell,  
La fattoria degli animali*

---

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>iii</b>
<b>1 Nozioni preliminari</b>	<b>1</b>
1.1 Misure, Misure Esterne e Teorema di Radon-Nikodym . . . . .	1
1.2 Misure di Radon e Teorema di Rappresentazione di Riesz . . . . .	3
1.3 Mollificatori, convoluzione e proprietà . . . . .	5
<b>2 Funzioni a variazione limitata</b>	<b>7</b>
<b>3 Insiemi di perimetro finito</b>	<b>13</b>
3.1 Definizioni e prime proprietà . . . . .	13
3.2 Frontiera ridotta . . . . .	15
3.3 Disuguaglianze isoperimetriche . . . . .	18
<b>4 Il Teorema di Compattezza Concentrata</b>	<b>21</b>
4.1 Il Teorema . . . . .	21
4.2 Esistenza di cluster isoperimetrici . . . . .	24
4.2.1 Dimostrazione del Teorema di Esistenza . . . . .	29
<b>A Formule di Coarea</b>	<b>35</b>



# Introduzione

Dato  $N \geq 1$ , un  $N$ -cluster in  $\mathbb{R}^d$  è una famiglia di insiemi di perimetro finito  $\mathbf{E} = (E(1), \dots, E(N))$  che soddisfa le seguenti proprietà:

- (i)  $0 < |E(h)| < \infty$  per ogni  $h = 1, \dots, N$ ;
- (ii)  $|E(h) \cap E(h')| = 0$  per ogni  $h \neq h'$ .

Le componenti  $E(h)$  sono chiamate *camere* del cluster. Inoltre, si definisce la *camera esterna* come

$$E(0) = \mathbb{R}^d \setminus \bigcup_{h=1}^N E(h).$$

Lo scopo del lavoro di tesi è di presentare una dimostrazione del *Teorema di Compattezza Concentrata* e dedurre l'esistenza di soluzioni del seguente problema variazionale

$$\inf \{P(\mathbf{E}) : \mathbf{E} \text{ } N\text{-cluster}, |E(1)| = m_1, \dots, |E(N)| = m_N\} \quad (1)$$

dove  $P(\mathbf{E}) := \frac{1}{2} \sum_{h=1}^N P(E(h)) + \frac{1}{2} P\left(\bigcup_{h=1}^N E(h)\right)$  e  $m_1, \dots, m_N$  rappresentano i volumi (fissati) delle camere del cluster. Le soluzioni di (1) prendono il nome di *cluster isoperimetrici*. Il caso  $N = 1$  coincide con il classico problema isoperimetrico, e per  $d = 3$  e  $N \geq 1$ , il modello fisico delle soluzioni è quello delle bolle di sapone. Il problema dell'esistenza e unicità della soluzione è stato largamente affrontato in letteratura. Uno dei risultati cardine è il Teorema di Esistenza di Almgren, che si accompagna ad uno studio sulla regolarità delle frontiere ridotte delle camere del cluster [Alm76]:

**Teorema 0.1.** *Se  $d, N \geq 2$  e  $(m_1, \dots, m_N) \in \mathbb{R}_+^N$ , allora esiste una soluzione di (1). Se  $\mathbf{E}$  è un minimo, allora è limitato in  $\mathbb{R}^d$ . Inoltre, se  $0 \leq h < k \leq N$ , allora  $\partial^* E(h) \cap \partial^* E(k)$  è una ipersuperficie regolare in  $\mathbb{R}^d$  con curvatura media costante. Infine,*

$$\sum_{h=0}^N \mathcal{H}^{d-1}(\partial E(h) \setminus \partial^* E(h)) = 0.$$

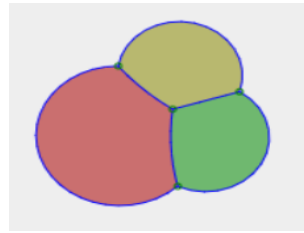


Figura 1: La *double bubble* nel piano. Figura 2: La *triple bubble* nel piano.

Come spesso accade nella risoluzione di problemi di tipo isoperimetrico, anche nella dimostrazione di questo risultato la teoria della regolarità delle soluzioni e lo studio della loro esistenza viaggiano di pari passo: un esempio, sono gli argomenti di simmetrizzazione che possono essere applicati per mostrare l'esistenza di minimi nel problema isoperimetrico. Una delle ragioni per cui l'aspetto dell'esistenza si appoggia alla regolarità risiede nell'impossibilità di applicare il Metodo Diretto, a causa della mancanza di compattezza dello spazio ambiente: infatti, le successioni minimizzanti potrebbero avere componenti di misura positiva che “scappano all'infinito”, ma che non possono essere trascurate; vanno quindi “tirate” indietro per non perdere massa. Argomenti di compattezza concentrata permettono di costruire minimi come limiti  $L^1_{loc}$  di successioni minimizzanti anche nel caso in cui queste ammettano componenti “all'infinito”. Inoltre, con la compattezza concentrata siamo in grado di separare la parte dell'esistenza da quella della regolarità, anche se non del tutto: infatti, tornano ad interagire nell'applicazione del *Lemma di Almgren* (Lemma (4.10)), che è tipicamente considerato il punto di partenza della teoria della regolarità. In ogni caso, la compattezza concentrata rappresenta uno strumento self-contained, che per questo motivo può essere ben applicato anche a contesti più astratti (si veda ad esempio [NPST22]).

Per quanto riguarda invece l'unicità (a meno di isometrie), conosciamo la forma dei minimi soltanto in alcuni casi particolari: ad esempio, per  $N = 1$ , come già detto, si tratta del ben noto problema isoperimetrico, mentre il caso  $N = 2$  è stato risolto prima da Foisy, Alfaro, Brock, Hodges e Zimba in  $\mathbb{R}^2$  [Foi+93] e poi da Reichardt in  $\mathbb{R}^d$  [Rei07]. La soluzione è meglio conosciuta con il nome di *standard double bubble* e consiste nell'unione di due sfere le cui interfacce si incontrano a 120 gradi (Figura 1). Per quanto riguarda il caso  $N = 3$ , parliamo di *standard triple bubble* e ricordiamo in particolare il contributo di Wichiramala, sempre nel piano (Figura 2) [Wic02] e di Milman-Neeman per  $d \geq 3$  [MN25]. Per  $N = 4$ , Paolini-Tamagnini in [PT18] e Paolini-Tortorelli in [PT20] hanno caratterizzato il minimo in  $\mathbb{R}^2$  nel caso in cui tutte le camere abbiano uguale volume (Figura 3); mentre in dimensione maggiore o uguale a 4, il caso è stato risolto per volumi qualunque ancora da Milman-Neeman, sempre in [MN25]. Nello stesso articolo [MN25], si risolve anche il caso  $N = 5$ ,  $d \geq 5$ . Negli ultimi anni, il problema è stato studiato anche in contesti diversi da quello euclideo: ad esempio, considerando  $\mathbb{S}^2$  come spazio ambiente [Law19], (o in generale  $\mathbb{S}^d$ , [MN25]), oppure dotando  $\mathbb{R}^d$

della misura gaussiana [MN22].

I primi tre capitoli della tesi sono dedicati a richiamare strumenti e nozioni di Analisi Funzionale e Teoria Geometrica della Misura che utilizzeremo nell'ultima parte. In particolare, il primo capitolo contiene nozioni preliminari di Teoria della Misura e Analisi Funzionale; il secondo capitolo è dedicato allo studio delle *funzioni a variazione limitata* ( $BV$ ), richiamando teoremi di compattezza e semicontinuità inferiore; nel terzo capitolo approfondiremo la teoria degli *insiemi di perimetro finito*, concentrandoci in particolar modo sulla stretta relazione con la teoria delle funzioni  $BV$ , sulla nozione di *frontiera ridotta* da essi indotta e richiamando infine la classica disuguaglianza isoperimetrica. Per la stesura di questi primi capitoli, abbiamo fatto maggiormente riferimento a [AFP00] e [GE15]. Infine, nel quarto capitolo affronteremo l'aspetto dell'esistenza di soluzioni di (1) grazie al Teorema (4.6).

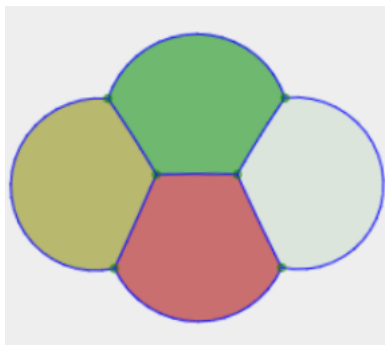


Figura 3: Il caso  $N = 4$  per volumi tutti uguali. La forma prende il nome di *sandwich*.



---

# Capitolo 1

## Nozioni preliminari

In questo primo capitolo richiameremo alcuni concetti di base della Teoria della Misura.

### 1.1 Misure, Misure Esterne e Teorema di Radon-Nikodym

**Definizione 1.1.** Sia  $X$  un insieme non vuoto e  $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ . Diremo che  $\mathcal{M}$  è una  $\sigma$ -algebra se verifica:

- (1)  $\emptyset \in \mathcal{M}$ ;
- (2) se  $A \in \mathcal{M}$ , allora  $A^C \in \mathcal{M}$ ;
- (3) se  $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{M}$ , allora  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M}$ .

La coppia  $(X, \mathcal{M})$  è detta spazio misurabile.

**Esempio 1.2.** (a) Se  $\mathcal{S}$  è una famiglia di sottoinsiemi di  $X$ , è possibile definire la  $\sigma$ -algebra generata da  $\mathcal{S}$  come la più piccola  $\sigma$ -algebra che contiene  $\mathcal{S}$ .

- (b) Se  $(X, \tau)$  è uno spazio topologico, si indica con  $\mathcal{B}(X)$  la  $\sigma$ -algebra generata da tutti gli aperti di  $X$ .  $\mathcal{B}(X)$  è chiamata  $\sigma$ -algebra di Borel.

**Definizione 1.3.** Siano  $X$  un insieme e  $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$  non vuoti. Una funzione  $\mu : \mathcal{S} \rightarrow [0, \infty]$  è detta:

- (1) *numerabilmente additiva*, se per ogni famiglia  $\{S_n : n \in \mathbb{N}\}$  di sottoinsiemi disgiunti di  $X$  tali che  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n \in \mathcal{S}$ , si ha

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(S_n).$$

- (2) *numerabilmente sub-additiva*, se per ogni famiglia  $\{S_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{S}$  e per ogni  $A \subset X$  tale che  $A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n$ , si ha

$$\mu(A) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(S_n).$$

- (3)  $\sigma$ -finita, se esiste  $\{S_n : n \in \mathbb{N}\} \subset S$  tale che  $X \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n$  e  $\mu(S_n) < \infty$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ .

**Definizione 1.4.** Siano  $(X, \mathcal{M})$  uno spazio misurabile e  $\mu : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$ . Diremo che  $\mu$  è una misura positiva su  $\mathcal{M}$  se:

- (1)  $\mu(\emptyset) = 0$ ;  
 (2)  $\mu$  è numerabilmente additiva e la serie  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(S_n)$  converge assolutamente.

La terna  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  è detta spazio misurale e gli insiemi  $E \in \mathcal{M}$  sono detti insiemi  $\mu$ -misurabili.

Quest'ultima definizione può essere generalizzata:

**Definizione 1.5.** Se  $(X, \mathcal{M})$  è uno spazio misurabile e  $\mu : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^d$ , diremo che  $\mu$  è una misura su  $\mathcal{M}$  se:

- (1)  $\mu(\emptyset) = 0$ ;  
 (2)  $\mu$  è numerabilmente additiva e la serie  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(S_n)$  converge assolutamente.

Inoltre, se  $d = 1$ , diremo che  $\mu$  è una misura reale; se  $d > 1$  diremo che è una misura vettoriale.

**Definizione 1.6.** Se  $\mu$  è una misura a valori in  $\mathbb{R}^d$ , con  $d \geq 1$ , si definisce la sua variazione totale come:

$$|\mu|(E) = \sup \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} |\mu(E_k)| : E_k \text{ } \mu\text{-misurabile}, E = \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} E_k \right\}$$

per ogni  $E$   $\mu$ -misurabile.

**Osservazione.** Si può verificare ([Mag21]) che  $|\mu|$  è una misura positiva e finita, i.e.  $\mu(X) < \infty$ .

**Definizione 1.7.** Dati  $(X, \mathcal{M})$  e  $(Y, \mathcal{M}')$  spazi misurabili, diciamo che una funzione  $f : X \rightarrow Y$  è misurabile se  $f^{-1}(E) \in \mathcal{M}$  per ogni  $E \in \mathcal{M}'$ . Diremo che  $f$  è boreliana nel caso in cui  $\mathcal{M}, \mathcal{M}'$  siano le  $\sigma$ -algebre dei boreliani di  $X$  e  $Y$  rispettivamente.

**Definizione 1.8.** Siano  $\mu$  una misura positiva e  $\nu$  una misura reale o vettoriale, definite su uno spazio misurabile  $(X, \mathcal{M})$ . Diremo che  $\nu$  è assolutamente continua rispetto a  $\mu$ , e scriveremo  $\nu \ll \mu$ , se

$$\forall E \in \mathcal{M} \quad \text{t.c.} \quad \mu(E) = 0 \implies \nu(E) = 0.$$

**Osservazione.** Si può facilmente notare che:

- (1) per qualsiasi misura, vale  $\nu \ll |\nu|$ ;

$$(2) \nu \ll \mu \iff |\nu| \ll \mu.$$

**Definizione 1.9.** Se  $\mu$  e  $\nu$  sono misure positive definite su uno spazio misurabile  $(X, \mathcal{M})$ , diremo che sono mutualmente singolari, e scriveremo  $\mu \perp \nu$ , se esiste  $E \in \mathcal{M}$  tale che  $\mu(E) = 0$  e  $\nu(X \setminus E) = 0$ . Se  $\mu$  e  $\nu$  sono misure vettoriali, diremo che sono mutualmente singolari se lo sono  $|\mu|$  e  $|\nu|$ .

**Teorema 1.10.** (Radon-Nikodym)

Sia  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  uno spazio misurabile con  $\mu$   $\sigma$ -finita, e sia  $\nu$  una misura assolutamente continua rispetto a  $\mu$ . Allora esistono uniche  $\nu^a, \nu^s$  misure a valori in  $\mathbb{R}^d$  tali che:

- (i)  $\nu^a \ll \mu$ ;
- (ii)  $\nu^s \perp \mu$ ;
- (iii)  $\nu = \nu^a + \nu^s$ .

Inoltre, esiste un'unica funzione  $f \in L^1((X, \mu), \mathbb{R}^d)$  tale che  $\nu^a = f\mu$ . Tale  $f$  è detta densità (di  $\nu$  rispetto a  $\mu$ ) e si indica con  $f = d\nu/d\mu$ .

*Dimostrazione.* Per una dimostrazione dettagliata, si può consultare [Mag21].  $\square$

**Corollario 1.11.** (Decomposizione polare)

Sia  $\mu$  è una misura a valori in  $\mathbb{R}^d$ , definita su uno spazio misurabile  $(X, \mathcal{M})$ , allora esiste un'unica  $f \in L^1((X, |\mu|), \mathbb{R}^d)$  a valori in  $\mathbb{S}^{d-1}$  e tale che  $\mu = f|\mu|$ .

## 1.2 Misure di Radon e Teorema di Rappresentazione di Riesz

**Definizione 1.12.** Dato  $X$  insieme non vuoto, una funzione  $\mu : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$  è una misura esterna se:

- (1)  $\mu(\emptyset) = 0$ ;
- (2)  $\mu$  è numerabilmente sub-additiva.

**Definizione 1.13.** Sia  $X$  uno spazio metrico localmente compatto e separabile (in breve, l.c.s.) e  $\mu : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$  una misura esterna. Diremo che  $\mu$  è una misura di Radon se verifica le seguenti proprietà:

- (1)  $\mu$  è boreliana;
- (2)  $\mu(K) < \infty$  per ogni  $K$  compatto di  $X$ ;
- (3)  $\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \subset A, K \subset X \text{ compatto}\}$  per ogni  $A$  aperto di  $X$ ;
- (4)  $\mu(E) = \inf\{\mu(A) : E \subset A, A \subset X \text{ aperto}\}$  per ogni  $E \subset X$ .

**Proposizione 1.14.** *Siano  $\mu$  è una misura di Radon ed  $E \subset X$   $\mu$ -misurabile, con  $\mu(E) < \infty$ . Allora*

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \subset E, K \text{ compatto}\}.$$

**Proposizione 1.15.** *Se  $X$  è uno spazio metrico l.c.s.,  $\mu$  una misura di Radon su  $X$  a valori in  $\mathbb{R}^d$  e  $|\mu|$  la sua variazione totale, allora*

$$|\mu|(A) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^d \int_X \varphi_i d\mu_i : \varphi \in C_c(A, \mathbb{R}^d), \|\varphi\|_\infty < \infty \right\}$$

Per delle dimostrazioni dettagliate delle proposizioni appena enunciate, è possibile consultare [Mag21].

**Definizione 1.16.** *Dato  $X$  spazio metrico l.c.s., definiamo lo spazio  $C_0(X, \mathbb{R}^d)$  come la chiusura di  $C_c(X, \mathbb{R}^d)$  rispetto alla norma infinito.*

**Definizione 1.17.** *Dato  $X$  spazio metrico l.c.s., diciamo che un funzionale  $L : C_0(X, \mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}$  è lineare e limitato se verifica*

$$(i) \quad L(f + g) = L(f) + L(g) \quad \forall f, g \in C_0(X, \mathbb{R}^d);$$

$$(ii) \quad \|L\| := \sup\{L(f) : f \in C_0(X, \mathbb{R}^d), |f| \leq 1\} < \infty.$$

**Teorema 1.18.** (Riesz) *Sia  $X$  uno spazio metrico l.c.s. e sia  $L : C_0(X, \mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}$  un funzionale lineare e limitato. Allora esistono uniche una misura di Radon  $\mu$  e una funzione  $\mu$ -misurabile  $g : X \rightarrow \mathbb{R}^d$ , con  $|g(x)| = 1$   $\mu$ -q.o., tali che*

$$L(f) = \int_X f \cdot g d\mu$$

per ogni  $f \in C_0(X, \mathbb{R}^d)$ .

Il Teorema di Riesz suggerisce che lo spazio delle misure di Radon può essere interpretato come il duale delle funzioni in  $C_0(X, \mathbb{R}^d)$ . Questa dualità induce una nozione di convergenza debole\* sulle misure, che è la seguente.

**Definizione 1.19.** *Sia  $X$  uno spazio metrico l.c.s e siano  $\mu, \{\mu_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  misure di Radon su  $X$ , a valori in  $\mathbb{R}^d$ . Diciamo che  $\{\mu_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  converge localmente debole\* a  $\mu$  se*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_X f d\mu_k = \int_X f d\mu \quad \forall f \in C_c(X, \mathbb{R}^d).$$

Se le misure  $\mu, \{\mu_k\}$  sono finite, diciamo che  $\{\mu_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  converge debole\* a  $\mu$  ( $\mu_k \xrightarrow{*} \mu$ ) se

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_X f d\mu_k = \int_X f d\mu \quad \forall f \in C_0(X, \mathbb{R}^d).$$

**Teorema 1.20.** *Sia  $X$  uno spazio metrico l.c.s e sia  $\{\mu_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  una successione di misure di Radon finite su  $X$  tale che  $\sup\{|\mu_k|(X) : k \in \mathbb{N}\} < \infty$ . Allora  $\{\mu_k\}_k$  ammette una sottosuccessione che converge debole\*.*

*Dimostrazione.* La tesi segue dal Teorema di Banach-Alaoglu, osservando che  $C_0(X, \mathbb{R}^d)$  è separabile.  $\square$

### 1.3 Mollificatori, convoluzione e proprietà

**Definizione 1.21.** Siano  $f, g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  funzioni  $\mathcal{L}^d$ -misurabili. Per ogni  $x \in \mathbb{R}^d$ , definiamo la convoluzione tra  $f$  e  $g$  come

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x - y)g(y) dy.$$

**Proposizione 1.22.** Date  $f, g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  funzioni  $\mathcal{L}^d$ -misurabili e  $x \in \mathbb{R}^d$ , se  $(|f| * |g|)(x) < \infty$ , allora  $(f * g)(x)$  è ben definita e reale. Inoltre,  $|(f * g)(x)| < (|f| * |g|)(x)$ .

*Dimostrazione.* Per ipotesi, sappiamo che

$$(|f| * |g|)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} |f|(x - y) |g|(y) dy = \int_{\mathbb{R}^d} |f(x - y)g(y)| dy < \infty,$$

cioè  $f(x - y)g(y) \in L^1(\mathbb{R}^d) \forall y \in \mathbb{R}^d$ . Ma allora  $(f * g)(x)$  è ben definito e

$$|f * g|(x) \leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x - y)| |g(y)| dy = (|f| * |g|)(x).$$

□

**Osservazione.** Per ogni  $x \in \mathbb{R}^d$  e per ogni coppia di funzioni  $f, g$  per cui la convoluzione sia ben definita, si ha

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x - y)g(y) dy = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x - y) dy = (g * f)(x). \quad (1.1)$$

Come è noto, la convoluzione è molto utile per “regolarizzare” funzioni che non hanno buone proprietà di regolarità, come ad esempio le funzioni  $L^p$ . Più nello specifico, vedremo come una particolare classe di funzioni lisce, i *mollificatori*, si prestano a tale scopo. Partiamo dalla loro costruzione.

Sia  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$  tale che

$$\varphi \geq 0, \quad \varphi(x) = -\varphi(x), \quad \text{spt} \varphi \subset B_1(0), \quad \int_{B_1(0)} \varphi dx = 1.$$

Sia poi  $\varepsilon > 0$ , definiamo

$$\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^d} \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

$\varphi_\varepsilon$  soddisfa le seguenti proprietà:

$$\varphi_\varepsilon \geq 0, \quad \varphi_\varepsilon(x) = -\varphi_\varepsilon(x), \quad \text{spt} \varphi_\varepsilon \subset B_\varepsilon(0), \quad \int_{B_\varepsilon(0)} \varphi_\varepsilon dx = 1.$$

Una tale funzione è un mollificatore.

**Osservazione.** La convoluzione di una funzione con un mollificatore permette di allargare il supporto della funzione originaria, cioè:

$$\text{spt}(f * \varphi_\varepsilon) \subset \text{spt}(f) + \overline{B_\varepsilon(0)}.$$

**Lemma 1.23.** Sia  $p \in [1, \infty)$  e siano  $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ ,  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ . Allora

$$(f * \varphi) \in C^\infty(\mathbb{R}^d) \quad e \quad \partial_i(f * \varphi) = f * \partial_i \varphi \quad \text{per ogni } i = 1, \dots, d.$$

Inoltre, valgono le seguenti stime:

$$\|f * \varphi\|_\infty \leq \|f\|_p \|\varphi\|_\infty \quad \|\nabla(f * \varphi)\|_\infty \leq \|f\|_p \|\nabla \varphi\|_q,$$

dove  $q$  è l'esponente coniugato di  $p$ .

**Lemma 1.24.** Siano  $p \in [1, \infty)$  e  $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ . Allora

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|f * \varphi_\varepsilon - f\|_p = 0.$$

Per le dimostrazioni dei risultati appena enunciati, si può consultare [Vel24].

---

## Capitolo 2

# Funzioni a variazione limitata

In questo capitolo daremo la definizione classica (*variazionale*) di funzioni a variazione limitata ed approfondiremo alcune loro proprietà che ci saranno utili nel seguito. In particolare, arriveremo a dimostrare un teorema di compattezza “ $L^1$ ” per funzioni  $BV$ .

D’ora in avanti, se non altrimenti specificato, indicheremo con  $\Omega$  un aperto di  $\mathbb{R}^d$ .

**Definizione 2.1.** Data  $u \in L^1(\Omega)$ , diciamo che  $u$  è una funzione a variazione limitata se esiste una misura di Radon  $Du = (D_1u \dots D_du)$  a valori in  $\Omega$  tale che

$$\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \quad \int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} \varphi dD_i u \quad \text{per } i = 1, \dots, d. \quad (2.1)$$

Indichiamo con  $BV(\Omega)$  lo spazio delle funzioni a variazione limitata.

**Osservazione.** L’uguaglianza (2.1) è equivalente a richiedere che per ogni  $\varphi \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^d)$  si abbia

$$\int_{\Omega} u \operatorname{div} \varphi dx = - \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} \varphi_i dD_i u. \quad (2.2)$$

**Esempio 2.2.** Dati  $a < b$  numeri reali, è definita la *funzione indicatrice* di  $(a, b)$  come

$$\mathbb{1}_{(a,b)}(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \notin (a, b) \\ 1, & \text{se } x \in (a, b) \end{cases}$$

È una funzione in  $BV(\mathbb{R})$  e la sua derivata distribuzionale è  $\delta(b) - \delta(a)$ , dove  $\delta$  è la Delta di Dirac.

Se  $A \subset \mathbb{R}^d$ , è sempre possibile definire la funzione indicatrice ad esso associata, ma non è detto che questa abbia variazione limitata in  $\mathbb{R}^d$ . Approfondiremo questo aspetto nel Capitolo 3.

**Definizione 2.3.** Data  $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ , si definisce la variazione di  $u$  in  $\Omega$  come

$$V(u, \Omega) = \sup \left\{ \int_{\Omega} u \operatorname{div} \varphi \, dx : \varphi \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^d), \|\varphi\|_\infty \leq 1 \right\} \quad (2.3)$$

**Teorema 2.4.** Data  $u \in L^1(\Omega)$ , allora  $u \in BV(\Omega)$  se e solo se  $V(u, \Omega) < \infty$ . Inoltre,  $V(u, \Omega)$  e  $|Du|(\Omega)$  coincidono per ogni  $u \in BV(\Omega)$ .

*Dimostrazione.* ( $\Rightarrow$ ) Se  $u \in BV(\Omega)$ , allora per ogni  $\varphi \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^d)$

$$\int_{\Omega} u \operatorname{div} \varphi \, dx = - \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} \varphi_i \, dD_i u \leq |Du|(\Omega)$$

per la proposizione (1.15). Passando al sup sulle  $\varphi \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^d)$  con  $\|\varphi\|_\infty \leq 1$ , si ottiene che  $V(u, \Omega) \leq |Du|(\Omega) < \infty$ .

( $\Leftarrow$ ) Supponiamo che  $V(u, \Omega) < \infty$  e consideriamo  $\varphi \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^d)$ . Si ha

$$\int_{\Omega} u \operatorname{div} \varphi \, dx = \|\varphi\|_\infty \int_{\Omega} u \frac{1}{\|\varphi\|_\infty} \operatorname{div} \varphi \, dx \leq \|\varphi\|_\infty V(u, \Omega).$$

Per densità di  $C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^d)$  in  $C_0(\Omega, \mathbb{R}^d)$ , possiamo considerare un funzionale lineare  $L$  che coincida con  $\varphi \mapsto \int_{\Omega} u \operatorname{div} \varphi \, dx$  su  $C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^d)$ . Poiché  $\|L\| \leq \|\varphi\|_\infty V(u, \Omega) < \infty$ , per il Teorema (1.18) esiste una misura di Radon  $\mu$  a valori in  $\mathbb{R}^d$  tale che

$$L(\varphi) = \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} \varphi_i \, d\mu_i, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^d).$$

In altre parole, abbiamo ottenuto che  $u \in BV(\Omega)$ , con  $Du = -\mu$ , da cui  $|Du|(\Omega) = |\mu|(\Omega)$ . Infine, dalla proposizione (1.15) deduciamo  $\|L\| = |\mu|(\Omega)$ , per cui si ottiene

$$|Du|(\Omega) = \|L\| \leq V(u, \Omega).$$

Le due quantità coincidono quindi per ogni  $u \in BV(\Omega)$ . □

Motivate dal Teorema appena visto, ci riferiremo a  $|Du|$  come alla variazione totale di  $u$ . Vediamo adesso un'importante proprietà di  $|Du|$ : la semicontinuità inferiore rispetto alla convergenza  $L^1_{loc}$ .

**Teorema 2.5.** Sia  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  una successione di funzioni in  $BV(\Omega)$  e  $u \in L^1(\Omega)$  tali che  $u_k \xrightarrow{L^1_{loc}} u$ . Allora

$$|Du|(\Omega) \leq \liminf_k |Du_k|(\Omega).$$

*Dimostrazione.* Consideriamo  $\varphi \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^d)$  con  $\|\varphi\|_\infty \leq 1$ , allora

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} u \operatorname{div} \varphi \, dx &= \lim_k \int_{\Omega} u_k \operatorname{div} \varphi \, dx \\
 &= - \lim_k \int_{\Omega} \varphi \cdot f_k \, d|Du_k| \quad \text{per (2.1) e (1.10)} \\
 &\leq \liminf_k \int_{\Omega} |\varphi \cdot f_k| \, d|Du_k| \\
 &\leq \|\varphi\|_\infty \|f_k\|_{L^1} \liminf_k \int_{\Omega} d|Du_k| \\
 &\leq \liminf_k |Du_k|(\Omega),
 \end{aligned}$$

da cui

$$|Du|(\Omega) = \sup \left\{ \int_{\Omega} u \operatorname{div} \varphi \, dx : \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \|\varphi\|_\infty \leq 1 \right\} \leq \liminf_k |Du_k|(\Omega).$$

□

È possibile definire su  $BV(\Omega)$  una norma che lo renda uno spazio di Banach, ponendo

$$\|u\|_{BV(\Omega)} = \|u\|_{L^1(\Omega)} + |Du|(\Omega). \quad (2.4)$$

Tuttavia, tale norma risulta essere troppo forte: ad esempio, lo spazio  $C^1(\Omega)$  non sarebbe denso in  $BV(\Omega)$ , e si perderebbero le classiche proprietà di approssimazione. Nonostante questo, le funzioni a variazione limitata possono essere approssimate da funzioni regolari e con gradiente limitato in norma  $L^1$  (si veda il Teorema (2.6)). Inoltre, questa norma non induce buone proprietà di compattezza: di seguito enunceremo un teorema di compattezza “in  $L^1$ ” (Teorema (2.10)), che comunque ci è sufficiente per gli scopi di questo lavoro.

**Teorema 2.6.** *Sia  $u \in L^1(\Omega)$ . Allora  $u \in BV(\Omega)$  se e solo se esiste una successione  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset C^\infty(\Omega)$  tale che:*

- (i)  $u_k \rightarrow u$  in  $L^1(\Omega)$ , per  $k \rightarrow \infty$ ;
- (ii)  $L := \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\nabla u_k| \, dx < \infty$ .

*Inoltre, si ha che  $L = |Du|(\Omega)$ .*

*Dimostrazione.* Per una dimostrazione dettagliata, si rimanda al Teorema 3.9 in [AFP00]. □

Per ottenere delle proprietà di compattezza più forti, è necessaria una nozione di convergenza più debole rispetto a quella indotta dalla norma in (2.4), che è la *convergenza debole\**.

**Definizione 2.7.** Siano  $u, \{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  funzioni in  $BV(\Omega)$ . Diremo che  $u_k$  converge debolmente\* in  $BV(\Omega)$  se  $u_k \xrightarrow{L^1(\Omega)} u$  e  $Du_k \xrightarrow{*} Du$  in  $\Omega$ .

Prima di trattare il teorema di compattezza sopracitato, enunciamo e dimostriamo due lemmi che ci aiuteranno nella successiva dimostrazione.

**Lemma 2.8.** Se  $\Omega'$  è un aperto di  $\mathbb{R}^d$  e  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  è una successione di funzioni in  $BV(\Omega')$  tale che

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \|u_k\|_{BV(\Omega')} < \infty \quad e \quad u_k \rightarrow u \quad \text{in } L^1(\Omega'),$$

allora  $u \in BV(\Omega')$  e  $Du_k \xrightarrow{*} Du$  in  $\Omega'$ .

*Dimostrazione.* Sappiamo che  $u \in BV(\Omega') \iff |Du|(\Omega') < \infty$ . Siccome  $\|u_k\|_{BV} < \infty \forall k \in \mathbb{N}$ , allora anche  $|Du_k|(\Omega') < \infty \forall k \in \mathbb{N}$ . Infine, per l'ipotesi di convergenza  $L^1$  e per la Proposizione (2.5), concludiamo che  $|Du|(\Omega') < \infty$ . Per quanto riguarda la convergenza debolmente\* delle derivate distribuzionali, osserviamo che l'ipotesi di limitatezza della norma  $BV$  delle  $u_k$  ci permette di applicare il Teorema (1.20) ed ottenere quindi una sottosuccessione  $Du_{k_j}$  che converge debolmente\* ad una certa misura  $\mu$ , per  $j \rightarrow \infty$ . Ci basta verificare che  $\mu$  coincide proprio con  $|Du|$ . A questo scopo, se consideriamo  $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ , otteniamo

$$\int_{\Omega} \varphi dD_i u_{k_j} = - \int_{\Omega} u_{k_j} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx \quad \forall i = 1, \dots, d$$

per cui, passando al limite per  $j \rightarrow \infty$  ed osservando che  $\limsup_j \|\nabla \varphi\|_{\infty} \|u_j - u\|_{L^1} \leq 0$ , si ottiene

$$\int_{\Omega} \varphi d\mu_i = - \int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx \quad \forall i = 1, \dots, d.$$

□

**Lemma 2.9.** Sia  $u \in BV(\Omega)$  e  $K \subset \Omega$  un compatto. Posto  $\delta = \text{dist}(K, \partial\Omega)$ , allora

$$\int_K |u * \varphi_\varepsilon - u| dx \leq \varepsilon |Du|(\Omega) \quad \forall \varepsilon \in (0, \delta),$$

dove  $\{\varphi_\varepsilon\}_\varepsilon$  è una famiglia di mollificatori.

*Dimostrazione.* Per prima cosa, osserviamo che dal Teorema (2.6) possiamo supporre che  $u \in C^1(\Omega)$ . Inoltre, per come è definita la convoluzione, per  $y \in B_1$  e

$\varepsilon < \delta$ , si ha che

$$\begin{aligned}
 \int_K |u * \varphi_\varepsilon - u| dx &= \int_K \left| \int_{\mathbb{R}^d} u(x - \varepsilon y) \varphi_\varepsilon(y) dy - u(x) \right| dx \\
 &= \int_K \left| \int_{\mathbb{R}^d} u(x - \varepsilon y) \varphi_\varepsilon(y) dy - u(x) \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_\varepsilon(y) dy \right| dx \\
 &\leq \int_K \int_{\mathbb{R}^d} |u(x - \varepsilon y) - u(x)| |\varphi_\varepsilon(y)| dy dx \\
 &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_K |u(x - \varepsilon y) - u(x)| dx \varphi_\varepsilon(y) dy. \tag{2.5}
 \end{aligned}$$

Siccome  $u(x - \varepsilon y) - u(x) = \varepsilon \int_0^1 \nabla u(x - t\varepsilon y) \cdot (-y) dt$ , vale

$$\int_K |u(x - \varepsilon y) - u(x)| dx \leq \varepsilon \int_K \int_0^1 |y \cdot \nabla u(x - t\varepsilon y)| dt dx \leq \varepsilon \int_0^1 \int_{K+B(0, t\varepsilon)} |\nabla u(z)| dz dt.$$

Sostituendo quest'ultima disuguaglianza in (2.5), otteniamo

$$\begin{aligned}
 \int_K |u * \varphi_\varepsilon - u| dx &\leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^1 \int_{K+B(0, t\varepsilon)} |\nabla u(z)| dz dt \varphi_\varepsilon(y) dy \\
 &\leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^1 \int_{\Omega} |\nabla u(z)| dz dt \varphi_\varepsilon(y) dy \\
 &\leq \varepsilon |Du|(\Omega) \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_\varepsilon(y) dy = \varepsilon |Du|(\Omega).
 \end{aligned}$$

□

**Teorema 2.10.** *Data una successione  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  in  $BV(\Omega)$  tale che*

$$\sup \left\{ \int_A |u_k| dx + |Du_k|(A) : k \in \mathbb{N} \right\} < \infty \quad \forall A \Subset \Omega \text{ aperto},$$

*allora esiste una sottosuccessione  $\{u_{k_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$  ed una funzione  $u \in BV(\Omega)$  tale che*

$$u_{k_j} \xrightarrow{L^1_{loc}(\Omega)} u.$$

*Dimostrazione.* A meno di prendere una successione di aperti  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  relativamente compatti in  $\Omega$  tali che  $A_n \uparrow \Omega$  e applicare un argomento diagonale, possiamo ridurci a considerare un aperto  $A$  relativamente compatto in  $\Omega$ ; ci basta mostrare che esiste una sottosuccessione  $\{u_{k_j}\}$  che converge in  $L^1(A)$  ad una funzione  $u$ . La funzione limite  $u$  sarà una funzione a variazione limitata in  $A$  per il Lemma (2.8).

Chiamiamo  $\delta = \text{dist}(A, \partial\Omega) > 0$  e consideriamo  $U$  un  $\delta/2$ -intorno di  $A$ . Siano poi  $0 < \varepsilon < \delta/2$  e per ogni  $k \in \mathbb{N}$  poniamo  $u_{k,\varepsilon} = u_k * \varphi_\varepsilon$ , con  $\varphi_\varepsilon$  mollificatore. Abbiamo così ottenuto funzioni in  $C^\infty(\bar{A})$  che, per il Lemma (1.23), verificano

$$\|u_{k,\varepsilon}\|_{C(\bar{A})} \leq \|u_k\|_{L^1(U)} \|\varphi_\varepsilon\|_\infty, \quad \|\nabla u_{k,\varepsilon}\|_{C(\bar{A})} \leq \|u_k\|_{L^1(U)} \|\nabla \varphi\|_\infty.$$

Siccome  $\sup_k \|u_k\|_{BV(A)} < \infty$ , la prima stima ci dice che la successione  $\{u_{k,\varepsilon}\}_{k \in \mathbb{N}}$  è equilimitata, mentre la seconda ci assicura che è equicontinua e dunque, per  $\varepsilon$  fissato, possiamo estrarre una sottosuccessione  $\{u_{k_j,\varepsilon}\}_j$  che converge uniformemente in  $C(\bar{A})$ . Grazie ad un argomento diagonale, possiamo trovare una sottosuccessione di  $\{u_{k_j,\varepsilon}\}_j$ , che indicheremo con la stessa notazione, che converge in  $C(\bar{A})$  per ogni  $\varepsilon < \delta/2$ . Dal Lemma (2.9), ricaviamo

$$\begin{aligned} \limsup_{j,j' \rightarrow \infty} \int_A |u_{k_j} - u_{k_{j'}}| dx &\leq \limsup_{j,j' \rightarrow \infty} \int_A |u_{k_j} - u_{k_j,\varepsilon}| + |u_{k_j,\varepsilon} - u_{k_{j'},\varepsilon}| dx \\ &\quad + \limsup_{j,j' \rightarrow \infty} \int_A |u_{k_j,\varepsilon} - u_{k_{j'},\varepsilon}| dx \\ &\leq 2\varepsilon \sup_{k \in \mathbb{N}} |Du_k|(U). \end{aligned}$$

Ciò mostra che, per arbitrarietà di  $\varepsilon$ , la sottosuccessione  $\{u_{k_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$  è di Cauchy in  $L^1(A)$  e quindi, per completezza di tale spazio, converge.  $\square$

---

## Capitolo 3

# Insiemi di perimetro finito

L'obiettivo di questo capitolo è trattare una specifica classe di funzioni  $BV$ : le funzioni caratteristiche di insiemi di perimetro finito. Innanzitutto, definiamo cos'è il perimetro di un insieme. Consideriamo  $\Omega$  aperto di  $\mathbb{R}^d$ .

### 3.1 Definizioni e prime proprietà

**Definizione 3.1.** Se  $E \subset \mathbb{R}^d$  è un insieme misurabile secondo Lebesgue, si definisce il perimetro di  $E$  in  $\Omega$  come

$$P(E, \Omega) = \sup \left\{ \int_E \operatorname{div} \varphi \, dx : \varphi \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^d), \|\varphi\|_\infty \leq 1 \right\}.$$

Diremo che  $E$  è un insieme di perimetro finito in  $\Omega$  se  $P(E, \Omega) < \infty$ . Se  $\Omega = \mathbb{R}^d$ , indicheremo con  $P(E) = P(E, \mathbb{R}^d)$  e diremo semplicemente che  $E$  ha perimetro finito.

Osserviamo subito che se  $|E \cap \Omega| < \infty$ , allora  $\mathbb{1}_E \in L^1(\Omega)$  e da (2.3) otteniamo immediatamente che  $P(E, \Omega) = V(\mathbb{1}_E, \Omega)$ . Dunque, fissato un aperto  $\Omega$ , se  $E$  ha perimetro finito in  $\Omega$ , la relativa funzione indicatrice è in  $BV(\Omega)$ . Viceversa, se  $E$  è un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^d$  tale che  $\mathbb{1}_E \in BV(\Omega)$ , concludiamo che il perimetro di  $E$  è finito in  $\Omega$ . Da quanto detto ricaviamo una definizione equivalente di insieme di perimetro finito e può essere riassunto nella seguente proposizione.

**Proposizione 3.2.** Sia  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  aperto e  $E$  un sottoinsieme misurabile secondo Lebesgue tale che  $|E \cap \Omega| < \infty$ . Allora

$$P(E, \Omega) < \infty \iff \mathbb{1}_E \in BV(\Omega). \quad (3.1)$$

Inoltre,  $P(E, \Omega) = |D\mathbb{1}_E|(\Omega)$ .

Tutto questo può essere riformulato in un contesto più “locale”.

**Definizione 3.3.** Se  $E \subset \mathbb{R}^d$  è un sottoinsieme  $\mathcal{L}^d$ -misurabile, diciamo che  $E$  è un insieme di perimetro localmente finito in  $\Omega$  se  $P(E, \Omega')$  per ogni  $\Omega' \Subset \Omega$ . Equivalentemente, per (3.2), diremo che  $E$  ha perimetro localmente finito in  $\Omega \iff \mathbb{1}_E \in BV_{loc}(\Omega)$ .

La proposizione (3.2) stabilisce un ponte tra la teoria delle funzioni  $BV$  e la teoria degli insiemi di perimetro finito: inevitabilmente, il perimetro eredita molte proprietà della variazione totale. Innanzitutto,  $\Omega \mapsto P(E, \Omega)$  è una misura di Radon, ristretta agli aperti di  $\mathbb{R}^d$ . Inoltre,  $E \mapsto P(E, \Omega)$  è semicontinua inferiormente rispetto ad una opportuna nozione di convergenza per gli insiemi, che è la seguente.

**Definizione 3.4.** Una successione di insiemi  $\{E_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  converge in misura in  $\Omega$  ad un insieme  $E$  se  $\lim_{k \rightarrow \infty} |(E_k \triangle E) \cap \Omega| = 0$ .

**Osservazione.**

$$|(E_k \triangle E) \cap \Omega| \rightarrow 0 \iff \|\mathbb{1}_{E_k} - \mathbb{1}_E\|_{L^1(\Omega)} \rightarrow 0, \text{ per } k \rightarrow \infty. \quad (3.2)$$

**Proposizione 3.5.** Sia  $\Omega$  un aperto di misura finita e siano  $\{E_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ ,  $E$  tali che  $E_k \rightarrow E$  in misura, per  $k \rightarrow \infty$ . Allora

$$P(E, \Omega) \leq \liminf_{k \in \mathbb{N}} P(E_k, \Omega).$$

*Dimostrazione.* Basta osservare che, poichè  $|\Omega| < \infty$ , allora  $|E \cap \Omega| < \infty$  e  $|E_k \cap \Omega| < \infty \forall k \in \mathbb{N}$ . Segue che le rispettive funzioni indicatrici sono in  $BV(\Omega)$  e  $P(E, \Omega) = |D\mathbb{1}_E|(\Omega)$ ,  $P(E_k, \Omega) = |D\mathbb{1}_{E_k}|(\Omega) \forall k \in \mathbb{N}$ . A questo punto, la convergenza in misura degli insiemi e l'osservazione (3.2) ci assicurano che  $\mathbb{1}_{E_k} \rightarrow \mathbb{1}_E$  in  $L^1(\Omega)$ , per  $k \rightarrow \infty$ . La tesi segue dalla proposizione (2.5).  $\square$

Anche le proprietà di compattezza vengono ereditate: in particolare vale un teorema analogo del Teorema (2.10), che è il seguente.

**Teorema 3.6.** Sia  $\Omega$  un aperto di misura finita e sia  $\{E_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  una successione di insiemi  $\mathcal{L}^d$ -misurabili tali che

$$\sup \{P(E_k, \Omega) : k \in \mathbb{N}\} < \infty.$$

Allora  $\{E_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  ammette una sottosuccessione che converge in misura in  $\Omega$ .

La nozione di convergenza in misura e le proprietà di semicontinuità inferiore e compattezza restano valide localmente (cioè per ogni  $\Omega' \Subset \Omega$ ), se  $\Omega$  ha misura infinita.

**Lemma 3.7.** Siano  $E, F$  sottoinsiemi  $\mathcal{L}^d$ -misurabili tali che  $|\Omega \cap (E \triangle F)| = 0$ . Allora  $P(E, \Omega) = P(F, \Omega)$ .

*Dimostrazione.* Sia  $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ ,  $\|\varphi\|_\infty \leq 1$ . Si ha

$$\begin{aligned} \int_E \operatorname{div} \varphi \, dx &= \int_\Omega \mathbb{1}_E \operatorname{div} \varphi \, dx = \int_{\Omega \cap E} \operatorname{div} \varphi \, dx = \int_{\Omega \cap F} \operatorname{div} \varphi \, dx \\ &= \int_\Omega \mathbb{1}_F \operatorname{div} \varphi \, dx = \int_F \operatorname{div} \varphi \, dx \leq P(F, \Omega). \end{aligned}$$

Segue che  $P(E, \Omega) \leq P(F, \Omega)$ . Scambiando i ruoli di  $E$  ed  $F$ , si ottiene la tesi.  $\square$

**Proposizione 3.8.** *Siano  $E, F$  sottoinsiemi  $\mathcal{L}^d$ -misurabili. Allora*

$$P(E, \Omega) = P(\mathbb{R}^d \setminus E, \Omega) \quad (3.3)$$

$$P(E \cup F, \Omega) + P(E \cap F, \Omega) \leq P(E, \Omega) + P(F, \Omega) \quad (3.4)$$

*Dimostrazione.* Consideriamo  $\varphi \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^d)$ ,  $\|\varphi\|_\infty \leq 1$ . Si può osservare che anche  $-\varphi \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^d)$  e verifica  $\|-\varphi\|_\infty \leq 1$ . Inoltre

$$\int_{\Omega \setminus E} \operatorname{div} \varphi \, dx = \int_\Omega \operatorname{div} \varphi \, dx - \int_E \operatorname{div} \varphi \, dx = \int_E \operatorname{div}(-\varphi) \, dx.$$

Segue che  $P(E, \Omega) = P(\mathbb{R}^d \setminus E, \Omega)$  e questo mostra (3.3).

Mostriamo infine (3.4). Siano  $\mathbb{1}_E, \mathbb{1}_F$  le funzioni indicatrici di  $E$  ed  $F$ : per il Teorema (2.6), possiamo ridurci a considerare due successioni di funzioni  $C^\infty(\Omega)$ ,  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  e  $\{v_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ , tali che  $u_k \rightarrow \mathbb{1}_E$  e  $v_k \rightarrow \mathbb{1}_F$  in  $L^1(\Omega)$ . Senza perdita di generalità, possiamo supporre che  $0 \leq u_k \leq 1, 0 \leq v_k \leq 1 \, \forall k \in \mathbb{N}$ . Si ha

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_\Omega |\nabla u_k| \, dx = P(E, \Omega), \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \int_\Omega |\nabla v_k| \, dx = P(F, \Omega).$$

Osserviamo inoltre che  $u_k v_k \xrightarrow{L^1(\Omega)} \mathbb{1}_{E \cap F}$  e che  $u_k + v_k - u_k v_k \xrightarrow{L^1(\Omega)} \mathbb{1}_{E \cup F}$  per  $k \rightarrow \infty$  e che valgono le seguenti stime per i rispettivi gradienti:

$$\begin{aligned} |\nabla u_k v_k| &\leq |v_k| |\nabla u_k| + |u_k| |\nabla v_k| \\ |\nabla(u_k + v_k - u_k v_k)| &\leq |1 - v_k| |\nabla u_k| + |1 - u_k| |\nabla v_k|. \end{aligned}$$

Mettendo insieme le due disuguaglianze, per linearità dell'integrale si ottiene

$$\int_\Omega |\nabla u_k v_k| \, dx + \int_\Omega |\nabla(u_k + v_k - u_k v_k)| \, dx \leq \int_\Omega |\nabla u_k| \, dx + \int_\Omega |\nabla v_k| \, dx.$$

Passando al limite per  $k \rightarrow \infty$ , si ha la tesi.  $\square$

## 3.2 Frontiera ridotta

Se nella sezione precedente abbiamo iniziato ad affrontare la teoria degli insiemi di perimetro finito da un punto di vista variazionale, studiandone le proprietà di compattezza e semicontinuità inferiore, ora vorremmo spostarci ad un approccio più geometrico, generalizzando la classica formula di Gauss-Green.

**Teorema 3.9. (Gauss-Green)**

Sia  $E \subset \mathbb{R}^d$  un insieme con bordo di classe  $C^1$ , tale che  $\overline{E} \subset \Omega$  e  $\mathcal{H}^{d-1}(\Omega \cap \partial E) < \infty$ . Allora per ogni  $\varphi \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^d)$  vale

$$\int_E \operatorname{div} \varphi \, dx = - \int_{\Omega \cap \partial E} \varphi \cdot \nu \, d\mathcal{H}^{d-1}, \quad (3.5)$$

dove  $\nu$  è la normale unitaria interna ad  $E$ .

Notiamo che in questo caso  $P(E) = \mathcal{H}^{d-1}(\partial E)$  e che per ogni  $F \subset \mathbb{R}^d$ , si ha  $P(E, F) = \mathcal{H}^{d-1}(F \cap \partial E)$ .

Consideriamo un insieme  $E$  di perimetro finito in  $\Omega$  e tale che  $|E \cap \Omega| < \infty$ . Dalla proposizione (3.2), sappiamo che  $\mathbb{1}_E \in BV(\Omega)$ , per cui  $D\mathbb{1}_E$  è una misura vettoriale su  $\Omega$ . Per il Corollario (1.11), possiamo scrivere  $D\mathbb{1}_E = \nu_E |D\mathbb{1}_E|$ , per cui in questo caso (2.2) si riscrive come

$$\int_E \operatorname{div} \varphi = - \int_{\Omega} \varphi \cdot \nu_E \, d|D\mathbb{1}_E| \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^d). \quad (3.6)$$

Alla luce della validità di (3.6), ci chiediamo se è possibile definire, per gli insiemi di perimetro finito, una nozione di bordo  $(d-1)$ -dimensionale in modo che valga (3.5) e la funzione  $\nu_E$  coincida con la normale (unitaria) interna ad  $E$ . Si può osservare che il bordo topologico non è adatto a questo scopo: dal Lemma (3.7), sappiamo che il perimetro non risente di modifiche effettuate su sottoinsiemi di misura nulla; d'altra parte, si possono costruire insiemi di perimetro finito il cui bordo abbia misura  $\mathcal{L}^d$  strettamente positiva. Vediamone un esempio.

**Esempio 3.10.** In  $\mathbb{R}^d$ ,  $d \geq 2$ , consideriamo una successione di punti  $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}^d$ . Dato  $\varepsilon > 0$ , possiamo trovare una successione  $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset (0, \varepsilon)$  tale che  $d\omega_d \sum_{n \in \mathbb{N}} r_n^{d-1} \leq 1$ . Poniamo poi  $B_N = \bigcup_{n=0}^N B_{r_n}(q_n)$  ed  $E = \bigcup_{N \in \mathbb{N}} B_N$ . Da (3.4), otteniamo

$$P(B_N) \leq \sum_{n=0}^N P(B_{r_n}(q_n)) = d\omega_d \sum_{n=0}^N r_n^{d-1} \leq 1.$$

Per la Proposizione (3.5), possiamo dire che  $P(E) \leq \liminf_{N \in \mathbb{N}} P(B_N) \leq 1$ . Inoltre,

$$|E| \leq \sum_{N \in \mathbb{N}} |B_N| = \omega_d \sum_{n \in \mathbb{N}} r_n^d = \varepsilon \omega_d \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{r_n^d}{\varepsilon} \leq \varepsilon d\omega_d \sum_{n \in \mathbb{N}} r_n^{d-1} \leq \varepsilon.$$

Siccome abbiamo scelto i centri  $\{q_n\}_n$  razionali,  $E$  interseca ogni aperto non vuoto dello spazio, per cui è denso in  $\mathbb{R}^d$ . Questo ci fa concludere che  $\partial E = \overline{E} \setminus E = \mathbb{R}^d \setminus E$ , per cui  $|\partial E| > 0$  e quindi  $\mathcal{H}^{d-1}(\partial E) = \infty$ .

Ogni  $E' \subset \mathbb{R}^d$  che differisce da  $E$  per un insieme di misura nulla è tale che  $P(E') = P(E) \leq 1$ ,  $|\partial E'| = |\partial E| > 0$ . Ciò ci dice che non possiamo trovare “buoni rappresentanti” per  $E$ , ossia insiemi ad esso equivalenti ma che abbiano bordo topologico di misura  $\mathcal{H}^{d-1}$  finita.

**Definizione 3.11.** Dato  $E \subset \mathbb{R}^d$  insieme di perimetro localmente finito, la frontiera ridotta di  $E$  (o bordo ridotto) è l'insieme  $\partial^* E$  dei punti  $x \in \text{spt}|D\mathbb{1}_E|$  per cui il limite

$$\nu_E(x) := \lim_{r \rightarrow 0} \frac{D\mathbb{1}_E(B_r(x))}{|D\mathbb{1}_E|(B_r(x))} \quad (3.7)$$

esiste ed appartiene a  $S^{d-1}$ . La mappa  $\nu_E : \partial^* E \rightarrow S^{d-1}$  è detta normale generalizzata interna (ad  $E$ ).

**Osservazione.** Si verifica che  $\nu_E$  è una funzione boreliana e che  $\partial^* E$  è un insieme misurabile. Inoltre,  $\partial^* E \subset \text{spt}|D\mathbb{1}_E| \subset \partial E$ .

**Esempio 3.12.** Mostriamo che la frontiera ridotta è strettamente contenuta nel bordo topologico. Consideriamo il quadrato  $Q = [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$  e poi un qualsiasi suo vertice, ad esempio  $(1, 1)$ . Chiaramente, questo punto appartiene al bordo topologico di  $Q$ ; vediamo che non fa parte del bordo ridotto: il limite (3.7) esiste e coincide con  $e_1 + e_2$ , che però ha norma strettamente maggiore di 1.

Dal Teorema di derivazione di Besicovitch possiamo concludere che per insiemi di perimetro (localmente) finito,  $|D\mathbb{1}_E|$  è concentrata su  $\partial^* E$ . In realtà, possiamo dire di più, grazie al Teorema di Struttura di De Giorgi (vedi Teorema 3.59, [AFP00]; Teorema 15.9 in [Mag12]), che rappresenta senz'altro uno dei più importanti risultati della Teoria degli Insiemi di Perimetro Finito e che, tra le altre cose, formalizza la relazione intuitiva che lega la nozione di misura  $(d-1)$ -dimensionale del bordo di un insieme e il concetto di perimetro, estendendola ad insiemi con bordo non regolare. Possiamo sintetizzare quanto detto come segue:

**Teorema 3.13.** Se  $E \subset \mathbb{R}^d$  è un insieme di perimetro finito, allora

$$P(E, \Omega) = \mathcal{H}^{d-1}(\Omega \cap \partial^* E). \quad (3.8)$$

Tutti questi risultati ci permettono finalmente di rispondere alla domanda posta ad inizio sezione e di riscrivere la (3.6) per insiemi di perimetro finito:

$$\int_E \text{div } \varphi = - \int_{\partial^* E} \varphi \cdot \nu_E d\mathcal{H}^{d-1} \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^d).$$

Se  $E$  è un insieme di perimetro finito, è interessante studiare i punti dello spazio ambiente che si trovano molto vicini al bordo ridotto di  $E$ . Introduciamo quindi i *punti di densità*  $t$ .

**Definizione 3.14.** Dato  $E$  un insieme  $\mathcal{L}^d$ -misurabile, per ogni  $t \in [0, 1]$  definiamo

$$E^{(t)} = \left\{ x \in \mathbb{R}^d : \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{|E \cap B_\rho(x)|}{|B_\rho(x)|} = t \right\}$$

Inoltre, l'insieme  $\partial^e E := \mathbb{R}^d \setminus (E^{(0)} \cup E^{(1)})$  è detto *frontiera essenziale* (o *bordo essenziale*) di  $E$ .

L'insieme  $E^{(1)}$  può essere interpretato come una generalizzazione del concetto topologico di parte interna ed di  $E$ . Analogamente,  $E^{(0)}$  è l'equivalente, nel senso delle misure, di  $\mathbb{R}^d \setminus \overline{E}$ .

Particolare importanza riveste il caso  $t = 1/2$ : questi punti sono, moralmente, i punti di frontiera, per una opportuna definizione di frontiera, che è proprio quella di frontiera ridotta introdotta poco sopra. Vale infatti il seguente risultato:

**Proposizione 3.15.** *Se  $E$  è un insieme di perimetro (localmente) finito e  $x \in \partial^* E$ , allora*

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{|E \cap B_\rho(x)|}{|B_\rho(x)|} = \frac{1}{2},$$

cioè  $\partial^* E \subset E^{(1/2)}$ .

*Dimostrazione.* Si veda il Corollario 15.8 in [Mag12]. □

In realtà vale un risultato più forte, che enunceremo nella prossima sezione.

### 3.3 Disuguaglianze isoperimetriche

Come accennato nell'introduzione, il problema (1) si riduce al noto problema isoperimetrico, per  $N = 1$ . In questo caso, sappiamo che il minimo coincide con la sfera  $d$ -dimensionale  $\mathbb{S}^{d-1}$ . Nonostante possa sembrare una risposta molto intuitiva, la dimostrazione di tale risultato non è banale e richiede strumenti più sofisticati: infatti, non è possibile applicare immediatamente il Metodo Diretto; tuttavia, risultati di convergenza locale ed argomenti di simmetrizzazione permettono di concludere. Inoltre, vale il seguente:

**Teorema 3.16.** *(Disuguaglianza isoperimetrica)*

*Se  $d \geq 2$  ed  $E \subset \mathbb{R}^d$  è un insieme di misura finita, allora*

$$P(E) \geq d\omega_d^{1/d} |E|^{\frac{d-1}{d}} \quad (3.9)$$

La (3.9) può essere anche localizzata: vale la seguente

**Proposizione 3.17.** *Siano  $d \geq 2$ ,  $\lambda \in (0, 1)$  e  $Q \subset \mathbb{R}^d$  un cubo  $d$ -dimensionale. Allora esiste una costante positiva  $\alpha = \alpha(d, \lambda)$  per cui si ha*

$$P(E, Q) \geq \alpha |E \cap Q|^{\frac{d-1}{d}} \quad (3.10)$$

per ogni insieme  $E$  di perimetro localmente finito e tale che  $|E \cap Q| \leq \lambda |Q|$ .

*Dimostrazione.* Si veda la Proposizione 12.37 in [Mag12]. □

**Osservazione.** La proposizione precedente si generalizza prendendo una palla  $B_R(x)$ , per qualche  $x \in \mathbb{R}^d$ , e  $R > 0$  al posto di un cubo.

**Remark 3.18.** Se  $\lambda = 1/2$  ed  $E \subset B_R(x)$  allora

$$P(E; B_R(x)) \geq \alpha(d) \min\{|E \cap B_R(x)|, |B_R(x) \setminus E|\}^{\frac{d-1}{d}}.$$

Concludiamo il capitolo riprendendo il concetto di punti di densità  $t$ , nel caso  $t = 1/2$ . La (3.10) è uno degli strumenti principali che permette di dimostrare il seguente, importantissimo, teorema:

**Teorema 3.19.** (Federer)

Se  $E$  è un insieme di perimetro (localmente) finito, allora  $\partial^* E \subset E^{(1/2)} \subset \partial^e E$  e

$$\mathcal{H}^{d-1}(\partial^e E \setminus \partial^* E) = 0$$

*Dimostrazione.* Si veda ancora [Mag12], Teorema 16.2. □

Il Teorema di Federer ci assicura che frontiera essenziale e frontiera ridotta coincidono  $\mathcal{H}^{d-1}$ -q.o. Ma allora, se  $E$  è un insieme di perimetro (localmente) finito, si ha

$$P(E, \Omega) = \mathcal{H}^{d-1}(\Omega \cap \partial^* E) = \mathcal{H}^{d-1}(\Omega \cap E^{(1/2)}).$$



---

## Capitolo 4

# Il Teorema di Compatezza Concentrata

Nella prima parte di questo capitolo enunceremo e dimostremo il Teorema di compatezza concentrata per insiemi di perimetro finito e lo adatteremo al caso di  $N$ -cluster. Nella seconda parte, vedremo come può essere applicato per dimostrare l'esistenza di cluster isoperimetrici in  $\mathbb{R}^d$ .

### 4.1 Il Teorema

L'idea di base della compatezza concentrata è la seguente: immaginiamo di avere una successione di insiemi (di perimetro finito) di volume totale fissato; alcuni (ma anche tutti) elementi potrebbero ammettere componenti che “scappano” all'infinito. Il teorema ci assicura di poter tirare indietro tali componenti, da una parte preservando il volume iniziale, dall'altra controllando il perimetro. Un modo per visualizzare questa costruzione è immaginare un album costituito da un insieme numerabile di fogli (tutte copie di  $\mathbb{R}^d$ ; ogni copia corrisponde ad una direzione di traslazione) e su ognuno di questi disegnare il pezzo che diverge nella direzione corrispondente. Il volume totale si riottiene sommando i volumi su ogni foglio.

**Teorema 4.1.** (*Compatezza concentrata*)

Sia  $\{E_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^d$  una successione di insiemi di perimetro finito tali che  $\sup_k P(E_k) < \infty$  e  $\lim_{k \rightarrow \infty} |E_k| = m$ . Allora  $\{E_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  ammette una sotto-successione per cui esistono un insieme  $I$  numerabile, una successione di insiemi  $\{E^i\}_{i \in I}$  ed una successione  $\{x_k^i\}_{i \in I}$  tali che:

- (i)  $\lim_{k \rightarrow \infty} |x_k^i - x_k^{i'}| = \infty \quad \forall i \neq i'$
- (ii)  $\lim_{k \rightarrow \infty} (E_k - x_k^i) = E^i \quad \text{in } L_{loc}^1$
- (iii)  $\sum_{i \in I} |E^i| = m$ .

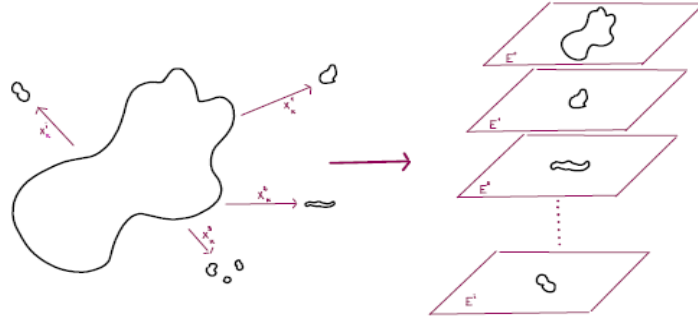


Figura 4.1: Un'idea della compatezza concentrata: i pezzi “lontani” vengono traslati indietro, creando numerabili copie di  $\mathbb{R}^d$ .

*Dimostrazione.* Possiamo assumere  $m < 1/2$ , in modo che, definitivamente rispetto a  $k$ , si abbia  $|E_k| < 1/2$  e si possa applicare (3.10) ad  $E_k$  e ad opportuni traslati del cubo  $d$ -dimensionale  $[0, 1]^d$ . Per ogni  $k$ , scegliamo  $\{y_k^j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{Z}^d$  e definiamo  $Q_k^j := [0, 1]^d + y_k^j$  in modo che la mappa  $j \rightarrow |E_k \cap Q_k^j|$  sia decrescente.

Siccome  $\sup_k P(E_k) < \infty$ , possiamo applicare il Teorema (2.10) alla successione  $\{E_k - y_k^j\}_{k \in \mathbb{N}}$  ed ottenere che, a meno di sottosuccessioni, questa converge  $L_{loc}^1$  ad un insieme contenuto in  $[0, 1]^d$ . Dunque esiste  $F^j \subset [0, 1]^d$  tale che

$$(E_k \cap Q_k^j) - y_k^j = (E_k - y_k^j) \cap [0, 1]^d \xrightarrow{L^1} F^j \quad \text{per } k \rightarrow \infty$$

Per  $n \gg 1$ , otteniamo

$$\begin{aligned} \sum_{j=n}^{\infty} |E_k \cap Q_k^j| &= \sum_{j=n}^{\infty} |E_k \cap Q_k^j|^{\frac{1}{d}} \cdot \sum_{j=n}^{\infty} |E_k \cap Q_k^j|^{\frac{d-1}{d}} \\ &\leq \sum_{j=n}^{\infty} |E_k \cap Q_k^j|^{\frac{1}{d}} \alpha^{-1} P(E_k, Q_k^j) \quad \text{per (3.10)} \\ &\leq \alpha^{-1} |E_k \cap Q_k^n|^{\frac{1}{d}} \sum_{j=n}^{\infty} P(E_k, Q_k^j) \\ &\leq \alpha^{-1} \left( \frac{|E_k|}{n} \right)^{\frac{1}{d}} \sum_{j=n}^{\infty} P(E_k, Q_k^j) \\ &\leq \alpha^{-1} \left( \frac{|E_k|}{n} \right)^{\frac{1}{d}} P(E_k) \leq \frac{P(E_k)}{2^{\frac{1}{d}}} n^{\frac{1}{d}} \alpha. \end{aligned}$$

Consideriamo di nuovo la successione dei vettori  $\{y_k^j\}_{k,j}$ : fissate due direzioni distinte  $j, j' \in \mathbb{N}$ , a meno di sottosuccessioni possiamo supporre che esista  $\lim_{k \rightarrow \infty} |y_k^j - y_k^{j'}| \in [0, \infty]$ . Definiamo la seguente relazione di equivalenza su  $\mathbb{N}$ : diciamo che  $j \sim j' \iff \lim_{k \rightarrow \infty} |y_k^j - y_k^{j'}| < \infty$  e indichiamo con  $I$  l'insieme

quoziente  $\mathbb{N}/\sim$ , che è quindi al più numerabile. Data una classe di equivalenza  $i \in I$ , consideriamo un qualsiasi suo elemento  $j_0$  ed osserviamo che  $\{y_k^j - y_k^{j_0}\}_{k \in \mathbb{N}}$  è limitata in  $\mathbb{Z}^d$ . Possiamo quindi supporre che  $\forall i, \forall j \in i, y_k^j - y_k^{j_0} = y^{j'} \in \mathbb{Z}^d$ , con  $y^j \neq y^{j'}$  se  $j \neq j'$ . Definiamo infine  $x_k^i := y_k^{j_0}$ . Analogamente a prima, esiste  $E^i = \lim_{k \rightarrow \infty} (E_k - x_k^i)$  in  $L_{loc}^1$ . Se  $j \in i$ , allora

$$\begin{aligned} |F^j| &\leftarrow |E_k \cap Q_k^j| = |E_k \cap ([0, 1]^d + y_k^j)| \\ &= |(E_k - x_k^i) \cap ([0, 1]^d + (y_k^j - x_k^i))| \\ &= |(E_k - x_k^i) \cap ([0, 1]^d + (y^j))| \rightarrow |E^i \cap ([0, 1]^d + (y^j))| \end{aligned}$$

Perciò

$$m = \lim_k |E_k| = \sum_j |F^j| \leq \sum_i |E^i|.$$

D'altra parte, per  $k$  sufficientemente grande, se fissiamo  $M \in \mathbb{N}$  e  $R > 0$ , otteniamo  $B_R(x_k^1), \dots, B_R(x_k^M)$ , palle a due a due disgiunte, da cui ricaviamo che

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} |E_k| &\geq \limsup_{k \rightarrow \infty} \left| \bigcup_{i=1}^M (E_k \cap B_R(x_k^i)) \right| = \limsup_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^M |E_k \cap B_R(x_k^i)| \\ &\geq \liminf_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^M |E_k \cap B_R(x_k^i)| = \sum_{i=1}^M \liminf_{k \rightarrow \infty} |E_k \cap B_R(x_k^i)| \\ &\geq \sum_{i=1}^M |E^i \cap B_R(0)|. \end{aligned}$$

siccome  $E_k - x_k^i \xrightarrow{L_{loc}^1} E^i$ . Passando ai limiti, prima per  $R \rightarrow \infty$  e poi per  $M \rightarrow \infty$ , otteniamo

$$m = \lim_k |E_k| \geq \sum_i |E^i|$$

che conclude la dimostrazione.  $\square$

**Teorema 4.2.** (semicontinuità concentrata)

Sia  $\{E_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^d$  una successione di insiemi di perimetro finito tali che  $\sup_k P(E_k) < \infty$  e  $\lim_{k \rightarrow \infty} |E_k| = m$ . Siano poi  $I \subset \mathbb{N}$ ,  $\{E^i\}_{i \in I}$  e  $\{x_k^i\}_{i \in I}$  come in (4.1). Allora

$$\sum_{i \in I} P(E^i) \leq \liminf_k P(E_k).$$

*Dimostrazione.* A meno di estrarre una sottosuccessione, possiamo supporre che  $\liminf_k P(E_k) = \lim_k P(E_k)$ . Fissati  $M \in \mathbb{N}$  e  $R > 0$ , poiché  $\lim_k |x_k^i - x_k^j| =$

$\infty$  per  $i \neq j$ , sappiamo che le palle  $B_R(x_k^1), \dots, B_R(x_k^M)$  sono a due a due disgiunte, se  $k$  è sufficientemente grande. Perciò

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P(E_k) \geq \limsup_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^M P(E_k, B_R(x_k^i)) \geq \liminf_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^M P(E_k, B_R(x_k^i)).$$

Siccome il perimetro è invariante per traslazioni e  $E_k - x_k^i$  converge  $L_{loc}^1$  ad  $E^i$ , per il Teorema (4.1) concludiamo che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P(E_k) \geq \sum_{i=1}^M P(E^i, B_R(0)).$$

Passando prima al limite per  $R \rightarrow \infty$  e poi per  $M \rightarrow \infty$ , si ha

$$\sum_{i \in I} P(E^i) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} P(E_k).$$

□

## 4.2 Esistenza di cluster isoperimetrici

**Definizione 4.3.** Un  $N$ -cluster in  $\mathbb{R}^d$  è una famiglia finita di insiemi di perimetro finito  $\mathbf{E} = (E(1), \dots, E(N))$  che soddisfa le seguenti proprietà:

- (i)  $0 < |E(h)| < \infty$  per ogni  $h = 1, \dots, N$ ;
- (ii)  $|E(h) \cap E(h')| = 0$  per ogni  $h \neq h'$ .

Le componenti  $E(h)$  sono chiamate camere del cluster. Per convenzione, si pone

$$E(0) = \mathbb{R}^d \setminus \bigcup_{h=1}^N E(h)$$

che è chiamato camera esterna.

Il volume di un  $N$ -cluster  $\mathbf{E}$  non è altro che il vettore dei volumi delle sue camere. Si indica tipicamente con  $|\mathbf{E}| = (|E(1)|, \dots, |E(N)|)$ .

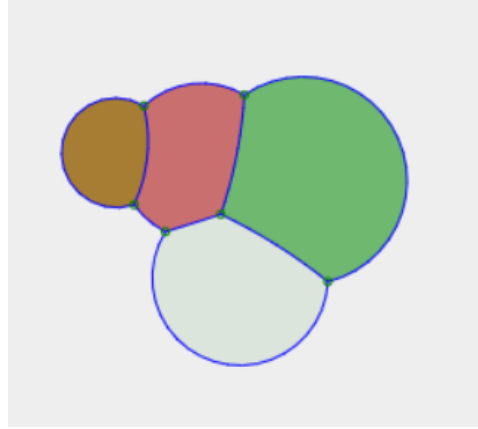


Figura 4.2: Esempio di un 4-cluster nel piano.

**Definizione 4.4.** Dato un  $N$ -cluster  $\mathbf{E} = (E(1), \dots, E(N))$ , il suo perimetro è definito come

$$P(\mathbf{E}) = \frac{1}{2} \sum_{h=1}^N P(E(h)) + \frac{1}{2} P\left(\bigcup_{h=1}^N E(h)\right).$$

Ci dedichiamo adesso allo studio del seguente problema variazionale:

**Definizione 4.5.** Sia  $N \geq 2$  e  $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_N) \in \mathbb{R}^N$  un vettore con componenti positive. Allora esiste un minimo del problema

$$\inf \{P(\mathbf{E}) : \mathbf{E} \text{ } N\text{-cluster}, |\mathbf{E}| = \mathbf{m}\}. \quad (4.1)$$

Possiamo adattare il Teorema (4.1) al caso di una successione di  $N$ -cluster, per  $N > 1$ .

**Teorema 4.6.** (Compattezza concentrata,  $N > 1$ )

Sia  $\{\mathbf{E}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  successione di cluster in  $\mathbb{R}^d$ . Allora  $\{\mathbf{E}_k\}_k$  ammette una sottosuccessione per cui esistono un insieme  $I$  numerabile, una successione di  $N$ -cluster  $\{\mathbf{E}^i\}_{i \in I}$  ed una successione  $\{x_k^i\}_{i \in I}$  tali che:

- (i)  $\lim_{k \rightarrow \infty} |x_k^i - x_k^{i'}| = \infty \quad \forall i \neq i'$
- (ii)  $\lim_{k \rightarrow \infty} (E_k(h) - x_k^i) = E^i(h) \quad \text{in } L_{loc}^1 \quad \forall h = 1, \dots, N$
- (iii)  $\sum_{i \in I} |E^i(h)| = \lim_{k \rightarrow \infty} |E_k(h)| \quad \forall h = 1, \dots, N.$

*Dimostrazione.* Per ogni  $k \in \mathbb{N}$ , poniamo  $\tilde{E}_k = E_k(1) \cup \dots \cup E_k(N)$ , in modo da ridurci ad una successione di insiemi formati da una sola camera. Dal Teorema (4.1), otteniamo un insieme  $E^i$  come limite  $L_{loc}^1$  della successione  $\{\tilde{E}_k - x_k^i\}_k$  e per cui vale

$$\sum_{i \in I} |E^i| = \lim_{k \rightarrow \infty} |\tilde{E}_k| = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{h=1}^N |E_k(h)| \quad (4.2)$$

dove l'ultima uguaglianza segue dal fatto che le camere dei clusters sono disgiunte. Ora, per ogni  $h = 1, \dots, N$  definiamo

$$E^i(h) = \lim_{k \rightarrow \infty} (E_k(h) - x_k^i) \quad \text{in } L_{loc}^1$$

ottenendo che  $E^i(h) \subset \tilde{E}^i$  per ogni  $h = 1, \dots, N$  e che  $|E^i(h) \cap E^i(h')| = 0$  per ogni  $h \neq h'$ , per cui

$$E^i = \bigsqcup_{h=1}^N E^i(h) \quad (4.3)$$

cioè  $E^i$  è ancora un  $N$ -cluster. Fissiamo  $M \in \mathbb{N}$  e  $R > 0$ ; per  $k$  sufficientemente grande, le palle  $B_R(x_k^1), \dots, B_R(x_k^M)$  sono a due a due disgiunte, quindi per ogni  $h = 1, \dots, N$  si ha

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} |E_k(h)| &\geq \liminf_{k \rightarrow \infty} \left| E_k(h) \cap \left( \bigcup_{i=1}^M B_R(x_k^i) \right) \right| = \liminf_{k \rightarrow \infty} \left| \bigcup_{i=1}^M (E_k(h) \cap B_R(x_k^i)) \right| \\ &= \liminf_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^M |E_k(h) \cap B_R(x_k^i)| = \sum_{i=1}^M |E^i(h) \cap B_R(0)|. \end{aligned}$$

Passando ai limiti per  $R \rightarrow \infty$  e poi per  $M \rightarrow \infty$ , si ottiene

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |E_k(h)| \geq \sum_{i \in I} |E^i(h)| \quad \text{per ogni } h = 1, \dots, N.$$

D'altra parte, mettendo insieme (4.2) e (4.3), otteniamo

$$\sum_{i \in I} \sum_{h=1}^N |E^i(h)| = \sum_{i \in I} |E^i| = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{h=1}^N |E_k(h)|,$$

per cui valgono contemporaneamente le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} \sum_{h=1}^N \sum_{i \in I} |E^i(h)| = \sum_{h=1}^N \lim_{k \rightarrow \infty} |E_k(h)| \\ \sum_{i \in I} |E^i(h)| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} |E_k(h)| \end{cases}$$

Ma allora deve valere

$$\sum_{i \in I} |E^i(h)| = \lim_{k \rightarrow \infty} |E_k(h)| \quad \text{per ogni } h = 1, \dots, N$$

da cui la tesi.  $\square$

**Teorema 4.7.** *Sia  $\{E_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  successione di  $N$ -cluster minimizzante per il problema (4.1). Consideriamo il relativo insieme  $I$  e le relative successioni  $\{x_k^i\}_{i \in I}$  ed  $\{E^i\}_{i \in I}$  date dal Teorema (4.6). Allora  $E^i$  è minimo locale sul foglio  $i$ -esimo, per ogni  $i \in I$ . Inoltre, l'insieme  $I$  è costituito da un unico indice.*

Enunciamo e dimostriamo due lemmi che ci torneranno utili ai fini della dimostrazione. Moralmente, il *Lemma di incollamento* (Lemma 2.6 in [NPT25]) ci dice che, dati due insiemi “vicini”, prendendo una palla di raggio  $\rho$ , possiamo “incollare” in modo opportuno parti del primo a parti del secondo, pagando una quantità di perimetro controllata (Figura 4.3). Il secondo lemma, *Volume fixing variations*, ci assicura che possiamo modificare leggermente il volume delle camere di un cluster in modo da poter controllare, anche in questo caso, la variazione di perimetro (Figura 4.4).

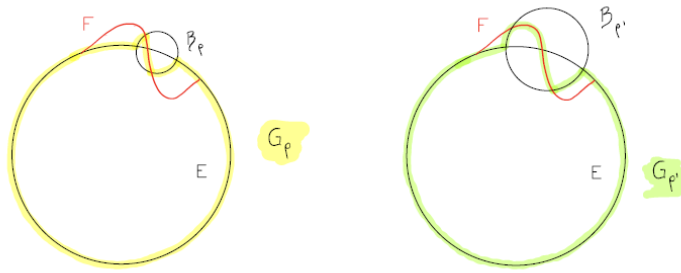


Figura 4.3: La quantità di perimetro  $P(G_\rho, \partial B_\rho)$  aggiunto, si controlla con  $|E \triangle F|$ .

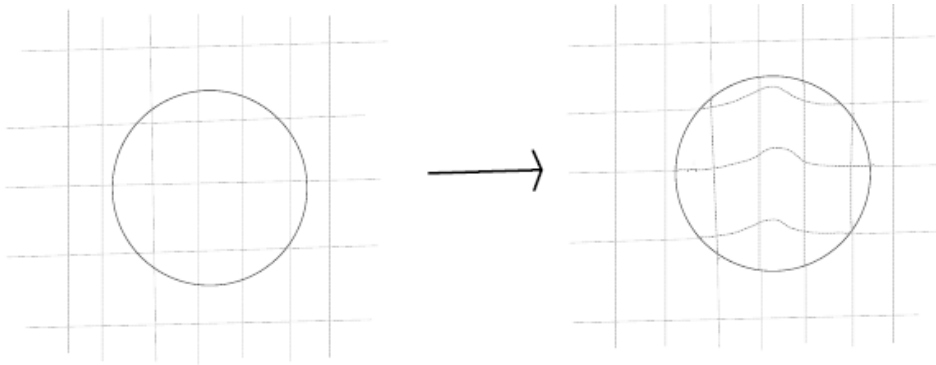


Figura 4.4: Tramite dei diffeomorfismi locali a supporto compatto, riusciamo ad aumentare il volume in zone mirate. La differenza di perimetro si controlla con una costante  $H$  (che ha le dimensioni di una curvatura) che moltiplica la quantità di volume modificato.

**Lemma 4.8.** (*di incollamento*) Dati  $E, F \subset \mathbb{R}^d$  insiemi di perimetro finito, definiamo

$$G_\rho = (E \cap B_\rho) \cup (F \setminus B_\rho).$$

Allora, per ogni  $0 < r < R$  si ha

$$\begin{aligned} \int_r^R P(G_\rho, \partial B_\rho) d\rho &= \int_r^R [P(G_\rho, B_R) - P(E, B_\rho) - P(F, B_R \setminus B_r)] d\rho \\ &= |(E \triangle F) \cap (B_R \setminus B_r)|. \end{aligned}$$

In particolare, l'insieme dei  $\rho \in (r, R)$  per cui vale la seguente disuguaglianza

$$P(G_\rho, \partial B_\rho) \leq \frac{|(E \triangle F) \cap (B_R \setminus B_r)|}{R - r} \quad (4.4)$$

ha misura positiva.

*Dimostrazione.* Sia  $\rho \in (r, R)$  raggio arbitrario. Poiché il perimetro è una misura nella seconda variabile, per come abbiamo definito  $G_\rho$ , si ha che

$$P(G_\rho, \partial B_\rho) = P(G_\rho, B_R) - P(E, B_\rho) - P(F, B_R \setminus \overline{B}_\rho).$$

Inoltre,  $P(E, \partial B_\rho) = P(F, \partial B_\rho) = 0$  per quasi ogni  $\rho \in (r, R)$ . Se ne deduce che per tali  $\rho$  vale

$$\begin{aligned} P(G_\rho, \partial B_\rho) &= \mathcal{H}^{d-1}(\partial^* G_\rho \cap \partial B_\rho) \\ &= \mathcal{H}^{d-1}((E^{(1)} \cap \partial B_\rho) \triangle (F^{(1)} \cap \partial B_\rho)) \end{aligned} \quad (4.5)$$

dove  $E^{(1)}$  ed  $F^{(1)}$  sono gli insiemi dei punti di densità 1 di  $E$  ed  $F$ , rispettivamente. Integrando in  $d\rho$  la (4.5), otteniamo

$$\begin{aligned} \int_r^R P(G_\rho, \partial B_\rho) d\rho &= \int_r^R \mathcal{H}^{d-1}((E^{(1)} \cap \partial B_\rho) \triangle (F^{(1)} \cap \partial B_\rho)) d\rho \\ &= |(E \triangle F) \cap (B_R \setminus B_r)| \end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza segue da (A.2). □

**Corollario 4.9.** Siano  $E$  ed  $F$  due  $N$ -cluster e sia  $G_\rho$  il seguente insieme

$$G_\rho = \left( \bigcup_{h=1}^N F(h) \cap B_\rho(x_h) \right) \cup \left( \bigcup_{h=1}^N E(h) \setminus B_\rho(x_h) \right).$$

Se esistono  $R > 0$  ed  $\{x_h\}_{h=1}^N$  per cui per ogni  $h = 1, \dots, N$ :

- (i) le palle  $B_R(x_1), \dots, B_R(x_N)$  sono a due a due disgiunte;
- (ii)  $|(E(h) \triangle F(h)) \cap (B_R(x_h) \setminus B_r(x_h))| < R - r/N^2$ , con  $0 < r < R$ ,

allora  $|\{\rho \in [r, R] : P(G_\rho, \partial B_\rho(x_h)) < \frac{1}{N}\}| > (R - r)(1 - \frac{1}{N})$ .

*Dimostrazione.* Segue dal Lemma (4.8) e dalla disuguaglianza di Chebyshev. □

**Lemma 4.10.** (*Volume fixing variations, o Lemma di Almgren*)

Sia  $\mathbf{F} = (F(1), \dots, F(N))$  un  $N$ -cluster. Esistono  $R_0 > 0$ ,  $H > 0$  e  $\mu_0 > 0$  tali che, dato  $\mathbf{m} = (m(0), \dots, m(N)) \in \mathbb{R}^{N+1}$  con

$$\sum_{h=0}^N m(h) = 0; \quad \sum_{h=1}^N |m(h)| \leq \mu_0.$$

allora esiste un  $N$ -cluster  $\tilde{\mathbf{F}} = (\tilde{F}(1), \dots, \tilde{F}(N))$  tale che

- (i)  $\tilde{F}(h) \triangle F(h) \Subset B_{R_0}$ ,
- (ii)  $|\tilde{F}(h) \cap B_{R_0}| = |F(h) \cap B_{R_0}| + m(h)$ ,
- (iii)  $P(\tilde{\mathbf{F}}, B_{R_0}) \leq P(\mathbf{F}, B_{R_0}) + H \sum_{h=0}^N |m(h)|$ .

*Dimostrazione.* Per una dimostrazione dettagliata, si veda il Lemma 29.14 in [Mag12].  $\square$

**Corollario 4.11.** (*Volume fixing variations sul multifoglio*)

Sia  $I$  l'insieme di indici dato dal Teorema (4.1) e sia  $\mathbf{F}^i = (F^i(1), \dots, F^i(N))$  un  $N$ -cluster. Sia poi  $M > 0$  tale che per ogni  $i \in \{1, \dots, M\} \subset I$ , e per ogni  $h = 1, \dots, N$ , si abbia  $\sum_{i=1}^M P(F^i(h)) > 0$ . Allora esistono  $R_0 > 0$ ,  $H > 0$  e  $\mu_0 > 0$  tali che, dato  $\mathbf{m} = (m(0), \dots, m(N)) \in \mathbb{R}^{N+1}$  con

$$m(0) = -\sum_{h=1}^N m(h); \quad \sum_{h=1}^N |m(h)| \leq \mu_0; \quad m(h) = 0, \quad \text{se } |F(h)| = 0.$$

Esiste un  $N$ -cluster  $\tilde{\mathbf{F}}^i = (\tilde{F}^i(1), \dots, \tilde{F}^i(N))$  tale che

- (i)  $\tilde{F}^i(h) \triangle F^i(h) \Subset B_{R_0}$ ,
- (ii)  $\sum_{i=1}^M |\tilde{F}^i(h) \cap B_{R_0}| = \sum_{i=1}^M |F^i(h)| + m(h)$ ,
- (iii)  $\sum_{i=1}^M P(\tilde{F}^i(h), B_{R_0}) \leq \sum_{i=1}^M P(F^i(h), B_{R_0}) + H \sum_{h=1}^N |m(h)|$ .

**Osservazione.** La costruzione riportata nel Teorema (4.1), adattata al caso di  $N$ -cluster, ci assicura che per ogni camera del cluster esiste un foglio su cui questa abbia misura positiva. Per questo, l'ipotesi aggiuntiva riguardo l'esistenza di  $M > 0$  per cui  $\sum_{i=1}^M P(F^i(h)) > 0$  per ogni camera, non è restrittiva e ci permette di considerare solo quei fogli su cui siamo sicuri di avere una quantità di volume da poter modificare.

#### 4.2.1 Dimostrazione del Teorema di Esistenza

Possiamo finalmente dimostrare il Teorema (4.7).

*Dimostrazione.* Consideriamo  $\{\mathbf{F}^i\}_{i \in I}$   $N$ -cluster per cui  $\sum_{i \in I} |\mathbf{F}^i| = \sum_{i \in I} |\mathbf{E}^i|$  e  $\forall h = 1, \dots, N$ ,  $F^i(h) \triangle E^i(h) \subseteq \mathbb{R}^d$ . Dato  $\varepsilon > 0$ , ci basta mostrare che

$$\sum_{i \in I} P(\mathbf{E}^i) \leq \sum_{i \in I} P(\mathbf{F}^i) + C\varepsilon.$$

dove  $C$  è una costante positiva che dipende solo da  $N$ .

*Primo passo.* Fissiamo  $\varepsilon > 0$ . Per prima cosa, osserviamo che per il Teorema (4.2), esiste  $M \gg 1$  tale che  $\sum_{i > M} P(\mathbf{E}^i) \leq \frac{\varepsilon}{4}$ .

Consideriamo le costanti  $R_0 > 0$ ,  $H > 0$  e  $\mu_0 > 0$  date dal Corollario (4.11), applicato al cluster  $\mathbf{F}^i$ , con  $i \leq M$ : scegliamo  $\mu < \mu_0$  tale che

$$H\mu < \frac{\varepsilon}{4} \quad (4.6)$$

e scegliamo poi  $R > R_0$  tale che per ogni  $h = 1, \dots, N$ , valgano le seguenti condizioni:

$$E^i(h) \triangle F^i(h) \subseteq B_{R+1} \quad (4.7)$$

$$|E^i(h) \triangle F^i(h) \cap B_{R+1}| \leq \frac{\varepsilon}{MN^3} \quad (4.8)$$

$$|F^i(h) \cap B_R| > |F^i(h)| - \frac{\mu}{2N^2} \quad (4.9)$$

$$\sum_{i=1}^M P(E^i(h), \mathbb{R}^d \setminus B_R) \leq \frac{\varepsilon}{4N}. \quad (4.10)$$

Sia poi  $k \gg 1$  tale che

$$|E_k(h) \cap B_R(x_k^i)| - |E^i(h)| < \frac{\mu}{2N^2} \quad (4.11)$$

$$\forall i = 1, \dots, M \quad P(\mathbf{E}^i, B_{R+1}) \leq P(\mathbf{E}_k, B_{R+1}(x_k^i)) + \frac{\varepsilon}{4M} \quad (4.12)$$

$$\text{le palle } B_{R+1}(x_k^1), \dots, B_{R+1}(x_k^M) \text{ siano a due a due disgiunte.} \quad (4.13)$$

dove (4.12) deriva dal fatto che  $\mathbf{E}^i$  è il limite  $L_{loc}^1$  di  $\mathbf{E}_k - x_k^i$ . Osserviamo inoltre che (4.9) e (4.11), insieme, ci dicono che

$$\left| \sum_{i=1}^M |E^i(h) \cap B_R| - |F^i(h) \cap B_R| \right| \leq \frac{\mu}{N^2} < \mu < \mu_0. \quad (4.14)$$

A questo punto, consideriamo il cluster  $\hat{\mathbf{F}} = (\hat{F}(1), \dots, \hat{F}(N))$  dato da

$$\hat{F}(h) = \left( \bigcup_{i=1}^M (F^i(h) + x_k^i) \cap B_r(x_k^i) \right) \cup \left( E_k(h) \setminus \bigcup_{i=1}^M B_r(x_k^i) \right)$$

dove  $r \in [R, R+1]$  è tale che valga la disuguaglianza (4.4). Osserviamo che possiamo scegliere  $r$  indipendentemente da  $i$  grazie al Corollario (4.9). Abbiamo

ottenuto una variazione di  $\mathbf{E}_k$  a supporto compatto nella palla  $B_r(x_k^i)$  e partendo da ciò siamo in grado di stimare le seguenti quantità:

$$\begin{aligned} P\left(\hat{\mathbf{F}}, \partial B_r(x_k^i)\right) &\leq \sum_{h=1}^N \left| \left( (F^i(h) + x_k^i) \triangle E_k(h) \right) \cap \left( B_{R+1}(x_k^i) \setminus B_R(x_k^i) \right) \right| \leq \frac{\varepsilon}{MN^2}; \\ P\left(\hat{\mathbf{F}}, \bigcup_{i=1}^M \partial B_r(x_k^i)\right) &\leq \sum_{i=1}^M P\left(\hat{\mathbf{F}}, \partial B_r(x_k^i)\right) \leq \frac{\varepsilon}{N^2}; \\ P\left(\hat{\mathbf{F}}, B_{R+1}(x_k^i)\right) &\leq P\left(\mathbf{E}_k, B_{R+1}(x_k^i) \setminus \overline{B_r}(x_k^i)\right) + P\left(\hat{\mathbf{F}}, \partial B_r(x_k^i)\right) + P\left(\mathbf{F}^i, B_r\right) \end{aligned}$$

e, infine,

$$\begin{aligned} P(\hat{\mathbf{F}}) &= P\left(\hat{\mathbf{F}}, \mathbb{R}^d \setminus \bigcup_{i=1}^M B_{R+1}(x_k^i)\right) + \sum_{i=1}^M P\left(\hat{\mathbf{F}}, B_{R+1}(x_k^i)\right) \\ &\leq P\left(\mathbf{E}_k, \mathbb{R}^d \setminus \bigcup_{i=1}^M B_{R+1}(x_k^i)\right) + \sum_{i=1}^M P\left(\mathbf{E}_k, B_{R+1}(x_k^i) \setminus \overline{B_r}(x_k^i)\right) + \\ &\quad + \sum_{i=1}^M P\left(\hat{\mathbf{F}}, \partial B_r(x_k^i)\right) + \sum_{i=1}^M P(\mathbf{F}^i, B_r). \end{aligned}$$

Otteniamo quindi

$$P(\hat{\mathbf{F}}) \leq P\left(\mathbf{E}_k, \mathbb{R}^d \setminus \bigcup_{i=1}^M B_r(x_k^i)\right) + \sum_{i=1}^M P(\mathbf{F}^i, B_r) + \frac{\varepsilon}{N^2}. \quad (4.15)$$

Ciò significa che riusciamo a controllare la differenza di perimetro tra  $\hat{\mathbf{F}}$  ed  $\mathbf{E}_k$ .

Secondo passo. Ora, per ottenere un competitore per (4.1), dobbiamo apportare ulteriori modifiche, stavolta ai volumi: per farlo, riprendiamo il Corollario (4.11) applicato al cluster  $\mathbf{F}^i$  e le corrispondenti costanti  $R_0 < R$ ,  $\mu < \mu_0$  e  $H$ : otteniamo un  $N$ -cluster  $\tilde{\mathbf{F}}^i$  tale che

- (i)  $\tilde{F}^i(h) \triangle F^i(h) \subseteq B_{R_0} \subset B_R$ ;
- (ii)  $\sum_{i=1}^M |\tilde{F}^i(h) \cap B_R| = \sum_{i=1}^M |F^i(h) \cap B_R| + m(h)$ ;
- (iii)  $\sum_{i=1}^M P(\tilde{\mathbf{F}}^i, B_R) \leq \sum_{i=1}^M P(\mathbf{F}^i, B_R) + H \sum_{h=1}^N |m(h)|$ ,

dove  $m(h) := |E_k(h)| - |E_k(h) \setminus \bigcup_{i=1}^M B_R(x_k^i)| - \sum_{i=1}^M |F^i(h) \cap B_R| \quad \forall h = 1, \dots, N$  e  $m(0) := -\sum_{h=1}^N m(h)$ . Si osserva che

$$\begin{aligned} |m(h)| &= \left| |E_k(h)| - |E_k(h) \setminus \bigcup_{i=1}^M B_R(x_k^i)| - \sum_{i=1}^M |F^i(h) \cap B_R| \right| \\ &= \left| |E_k(h) \cap \left( \bigcup_{i=1}^M B_R(x_k^i) \right)| - \sum_{i=1}^M |F^i(h) \cap B_R| \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^M |E_k(h) \cap B_R(x_k^i)| - \sum_{i=1}^M |F^i(h) \cap B_R| \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^M |E^i(h) \cap B_R| - |F^i(h) \cap B_R| \right| \leq \mu_0. \end{aligned}$$

da (4.14), e ciò mostra che abbiamo apportato una variazione di volume effettivamente ammissibile.

In modo analogo a quanto già fatto, definiamo una variazione a supporto compatto di  $\mathbf{F}^i$ , che chiamiamo  $\mathbf{G} = (G(1), \dots, G(N))$ , data da

$$G(h) = \left( \bigcup_{i=1}^M \left( \tilde{F}^i(h) + x_k^i \right) \cap B_R(x_k^i) \right) \cup \left( \hat{F}^i(h) \setminus \bigcup_{i=1}^M B_R(x_k^i) \right).$$

È immediato verificare che  $|G(h)| = |E_k(h)| \quad \forall h = 1, \dots, N$  e  $\forall k \in \mathbb{N}$ . Per minimalità di  $\mathbf{E}_k$ , abbiamo

$$\begin{aligned} P(\mathbf{E}_k) &\leq P(\mathbf{G}) = P\left(\mathbf{G}, \mathbb{R}^d \setminus \bigcup_{i=1}^M B_R(x_k^i)\right) + \sum_{i=1}^M P(\mathbf{G}, B_R(x_k^i)) \\ &= P\left(\hat{\mathbf{F}}^i, \mathbb{R}^d \setminus \bigcup_{i=1}^M B_R(x_k^i)\right) + \sum_{i=1}^M P(\tilde{\mathbf{F}}^i, B_R) \\ &\leq P\left(\hat{\mathbf{F}}^i, \mathbb{R}^d \setminus \bigcup_{i=1}^M B_R(x_k^i)\right) + \sum_{i=1}^M P(\mathbf{F}^i, B_R) + H \sum_{h=1}^N |m(h)| \\ &= P\left(\hat{\mathbf{F}}^i, \mathbb{R}^d \setminus \bigcup_{i=1}^M B_R(x_k^i)\right) + \sum_{i=1}^M P(\hat{\mathbf{F}}, B_R(x_k^i)) + H \sum_{h=1}^N |m(h)| \\ &= P(\hat{\mathbf{F}}) + H \sum_{h=1}^N |m(h)| \leq P\left(\mathbf{E}_k, \mathbb{R}^d \setminus \bigcup_{i=1}^M B_r(x_k^i)\right) + \sum_{i=1}^M P(\mathbf{F}^i, B_r) + \frac{\varepsilon}{N^2} + \frac{\varepsilon}{4} \end{aligned}$$

dove l'ultima disuguaglianza segue da (4.6) e (4.15).

Ora, poiché

$$P(\mathbf{E}_k) = P(\mathbf{E}_k, \mathbb{R}^d \setminus \bigcup_{i=1}^M B_r(x_k^i)) + \sum_{i=1}^M P(\mathbf{E}_k, B_r(x_k^i)),$$

segue che

$$\sum_{i=i}^M P(\mathbf{E}_k, B_r(x_k^i)) \leq \sum_{i=1}^M P(\mathbf{F}^i, B_r) + \frac{\varepsilon}{N^2} + \frac{\varepsilon}{4} \leq \sum_{i=1}^M P(\mathbf{F}^i) + \frac{\varepsilon}{N^2} + \frac{\varepsilon}{4}.$$

Per come abbiamo scelto  $M$  inizialmente,  $R$  in (4.10) e  $k$  in (4.12), possiamo concludere che

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} P(\mathbf{E}^i) &= \sum_{i \leq M} P(\mathbf{E}^i, B_r) + \sum_{i \leq M} P(\mathbf{E}^i, \mathbb{R}^d \setminus B_r) + \sum_{i > M} P(\mathbf{E}^i) \\ &\leq \sum_{i \leq M} P(\mathbf{E}^i, B_r) + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq \sum_{i \leq M} P(\mathbf{E}_k, B_r(x_k^i)) + \frac{3}{4}\varepsilon \\ &\leq \sum_{i \in I} P(\mathbf{F}^i) + \frac{\varepsilon}{N^2} + \varepsilon. \end{aligned}$$

dove  $C = \frac{1}{N^2} + 1$  è la costante cercata. La tesi segue per arbitrarietà di  $\varepsilon$ .

Terzo passo. Per concludere la dimostrazione del Teorema, mostreremo che su ogni foglio  $i$ , il cluster  $\mathbf{E}^i$ , essendo minimo, è limitato. Questo ci permette di concludere che possiamo ricondurci ad un unico foglio.

Fissiamo quindi un foglio  $i$  e consideriamo il relativo cluster che, per non appesantire la notazione, indicheremo semplicemente con  $\mathbf{E}$ .

Consideriamo ora  $t > 0$ ,  $B_t := B(0, t)$  la palla di centro 0 e raggio  $t$ , e definiamo i seguenti oggetti per ogni  $h = 1, \dots, N$ :

- (1) l'insieme  $E_t(h) = E(h) \cap B_t$ ;
- (2) la funzione  $u_h : (0, +\infty) \longrightarrow (0, +\infty)$ ,  $t \mapsto |E(h) \setminus B_t|$ .

Osserviamo che  $u_h$  è monotona decrescente, quindi derivabile quasi ovunque per il Teorema di Lebesgue. Si ha inoltre

$$|E(h) \setminus B_t| = \int_t^\infty \mathcal{H}^{d-1}(E \cap \partial B_\tau) d\tau. \quad (4.16)$$

Per ogni  $t > 0$ , definiamo  $u(t) = \sum_{h=1}^N u_h(t) = \sum_{h=1}^N |E(h) \setminus B_t|$ :  $u$  è ancora una funzione monotona decrescente, quindi derivabile per quasi ogni  $t > 0$ , con  $u'(t) = \sum_{h=1}^N u'_h(t)$ .

Quindi per ogni  $h = 1, \dots, N$  vale

$$\begin{aligned} P(E_t(h)) &\leq P(E(h)) - P(E(h) \setminus B_t) + 2\mathcal{H}^{d-1}(E(h) \cap \partial B_t) \\ &\leq P(E(h)) - P(E(h) \setminus B_t) + 2|u'(t)|. \end{aligned}$$

Se applichiamo il Lemma (4.10) ad  $\mathbf{E}_t$ , per  $t > R$  abbastanza grande affinché  $u(t) < \mu$ ,<sup>1</sup> otteniamo un cluster  $\mathbf{F}_t$  tale che:

- (i)  $|F_t(h)| = |E_t(h)| + |E(h) \setminus B_t| = |E(h)|$ ;
- (ii)  $P(F_t(h)) \leq P(E_t(h)) + H \sum_{h=1}^N |E(h) \setminus B_t| = P(E_t(h)) + Hu(t)$ .

Per minimalità di  $\mathbf{E}$ , possiamo osservare che

$$\begin{aligned} \sum_{h=1}^N P(E(h)) &\leq \sum_{h=1}^N P(F_t(h)) \leq \sum_{h=1}^N P(E_t(h)) + Hu(t) \\ &\leq \sum_{h=1}^N P(E(h)) - \sum_{h=1}^N P(E(h) \setminus B_t) + 2N|u'(t)| + Hu(t). \end{aligned}$$

Ricordiamo che  $u' < 0$ , per cui, riarrangiando i termini, la precedente disequazione si riscrive come

$$2Nu'(t) \leq Hu(t) - \sum_{h=1}^N P(E(h) \setminus B_t) \leq Hu(t) - P\left(\bigcup_{h=1}^N (E(h) \setminus B_t)\right) \quad (4.17)$$

dove l'ultima disuguaglianza segue dalla proprietà (3.4). Grazie alla disuguaglianza isoperimetrica in (3.9), sappiamo che

$$P\left(\bigcup_{h=1}^N (E(h) \setminus B_t)\right) \geq \alpha \left| \bigcup_{h=1}^N (E(h) \setminus B_t) \right|^{\frac{d-1}{d}} = \alpha \left( \sum_{h=1}^N |E(h) \setminus B_t| \right)^{\frac{d-1}{d}}$$

dove la prima uguaglianza segue dal fatto che gli insiemi  $\{E(h) \setminus B_t\}_{h=1, \dots, N}$  sono disgiunti. Perciò, (4.17) diventa

$$u'(t) \leq \frac{H}{2N} u(t) - \frac{\alpha}{2N} u(t)^{\frac{d-1}{d}}.$$

Se  $u < 1$ , allora  $u \ll u^{1-\frac{1}{d}}$ , per cui possiamo supporre che il termine  $\frac{H}{2N}u$  sia trascurabile rispetto a  $\frac{\alpha}{4N} u^{\frac{d-1}{d}}$ .

Possiamo quindi ricondurci a studiare  $u' \leq -\frac{\alpha}{4N} u^{\frac{d-1}{d}}$ , da cui ricaviamo  $(d \sqrt[d]{u})' \leq -\frac{\alpha}{4N}$ . Segue che la funzione  $d \sqrt[d]{u(t)} \leq u(t_0) - \frac{\alpha}{4N}(t - t_0)$ , per un certo  $t_0 \in (0, +\infty)$ , quindi esiste  $t_1 > t_0$  tale che  $u(t) = 0 \forall t > t_1$ .

Quarto passo. Abbiamo mostrato che su ogni foglio  $i$ , il cluster  $E^i$  è limitato. Per ogni  $i \in I$ , possiamo quindi considerare  $R_i > 0$  e  $B(0, R_i)$  tale che  $E^i \subset B(0, R_i) \subset \mathbb{R}^d$ . Questo ci permette, tramite un'opportuna traslazione, di collocare tutti gli  $E^i$  su uno stesso (unico) foglio.  $\square$

<sup>1</sup>  $R$  e  $\mu$  sono le costanti fornite dal lemma.

---

## Appendice A

# Formule di Coarea

In letteratura, esistono moltissime versioni della formula di coarea; tuttavia, quella che risulta tra le più versatili è la seguente.

**Teorema A.1.** (*Formula di Coarea*)

Siano  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  un aperto e  $u : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione Lipschitziana. Allora, per ogni  $t \in \mathbb{R}$ , la mappa  $t \rightarrow P(\{u > t\}, \Omega)$  è boreliana e

$$\int_{\Omega} |\nabla u| dx = \int_{\mathbb{R}} P(u > t, \Omega) dt. \quad (\text{A.1})$$

*Dimostrazione.* Una dimostrazione esaustiva del risultato è contenuta nel Teorema 13.1 in [Mag12].  $\square$

Come conseguenza del precedente Teorema, si può ottenere la formula che segue:

$$|E \cap B_r(x)| = \int_0^r \mathcal{H}^{d-1}(E \cap B_t(x)) dt. \quad (\text{A.2})$$

Grazie alla teoria delle funzioni  $BV$  e a quanto mostrato nel Capitolo 2, siamo in grado di enunciare una versione di (A.1) in tale contesto

**Teorema A.2.** (*Formula di Coarea in  $BV$* )

Per ogni  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  aperto e per ogni  $u \in L^1_{loc}(\Omega)$  vale

$$V(u, \Omega) = \int_{\mathbb{R}} P(\{u > t\}, \Omega) dt. \quad (\text{A.3})$$

In particolare, se  $u \in BV(\Omega)$ , l'insieme  $\{u > t\}$  ha perimetro finito in  $\Omega$  per  $\mathcal{L}^1$ -q.o.  $t$  reale, e vale

$$|Du|(B) = \int_{\mathbb{R}} |D\mathbf{1}_{\{u>t\}}|(B) dt \quad \forall B \subset \mathcal{B}(\Omega). \quad (\text{A.4})$$

Infine, il Teorema (3.19) enunciato alla fine del Capitolo 3, ci assicura che (A.4) si può riscrivere anche come

$$|Du|(B) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{H}^{d-1}(B \cap \partial^* \{u > t\}) dt \quad \forall B \subset \mathcal{B}(\Omega),$$

il che sottolinea ancora una volta lo stretto legame esistente tra la teoria delle funzioni a variazione limitata e quella degli insiemi di perimetro finito.

---

# Bibliografia

- [Alm76] Frederick J Almgren. “Existence and regularity almost everywhere of solutions to elliptic variational problems with constraints”. In: *Memoirs of the American Mathematical Society* 4.165 (1976).
- [Foi+93] Joel Foisy, Manuel Alfaro Garcia, Jeffrey Brock, Nickelous Hodges e Jason Zimba. “The Standard Double Soap Bubble in  $\mathbb{R}^2$  uniquely minimizers perimeter”. In: *Pacific Journal of Mathematics* 159.1 (1993).
- [AFP00] Luigi Ambrosio, Nicola Fusco e Diego Pallara. *Functions of Bounded Variation and Free Discontinuity Problems*. Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press, Oxford University Press, 2000.
- [Wic02] Wacharin Wichiramala. *The Planar Triple Bubble Problem*. Ph.D. Thesis, 2002.
- [Rei07] Ben W Reichardt. “Proof of the Double Bubble Conjecture in  $\mathbb{R}^n$ ”. In: *arXiv preprint arXiv:0705.1601* (2007).
- [Mag12] Francesco Maggi. *Sets of Finite Perimeter and Geometric Variational Problems*. Cambridge University Press, 2012.
- [GE15] Ronald F Gariepy e Lawrence Craig Evans. *Measure theory and fine properties of functions, Revised edition*. 2015.
- [PT18] Emanuele Paolini e Andrea Tamagnini. “Minimal clusters of four planar regions with the same area”. In: *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations* 24.3 (2018), pp. 1303–1331.
- [Law19] Gary R Lawlor. “Perimeter-minimizing triple bubbles in the plane and the 2-sphere”. In: *Analysis and Geometry in Metric Spaces* 7.1 (2019), pp. 45–61.
- [PT20] Emanuele Paolini e Vincenzo M. Tortorelli. “The quadruple planar bubble enclosing equal areas is symmetric”. In: *Calculus of Variations and Partial Differential Equations* 59.1 (2020), p. 20.
- [MN22] Emanuel Milman e Joe Neeman. “The Gaussian double-bubble and multi-bubble conjectures”. In: *Annals of Mathematics* 195.1 (2022), pp. 89–206.

- [NPST22] Matteo Novaga, Emanuele Paolini, Eugene Stepanov e Vincenzo Maria Tortorelli. “Isoperimetric Clusters in Homogeneous Spaces via Concentration Compactness”. In: *Journal of Geometric Analysis* 32.11 (2022).
- [MN25] Emanuel Milman e Joe Neeman. “The structure of isoperimetric bubbles on  $\mathbb{R}^n$  and  $S^n$ ”. In: *Acta Mathematica* 234.1 (2025), pp. 71–188.
- [NPT25] Matteo Novaga, Emanuele Paolini e Vincenzo Maria Tortorelli. “Locally isoperimetric partitions”. In: *Trans. Amer. Math. Soc.* 378.4 (2025). cvgmt preprint, pp. 2517–2548. url: <http://cvgmt.sns.it/paper/6331/>.
- [Mag21] Valentino Magnani. *Appunti del Corso di Analisi Reale, tenuto dal Prof. Valentino Magnani*. Università di Pisa, 2020/2021.
- [Vel24] Bozhidar Velichkov. *Appunti del Corso di Spazi di Sobolev, tenuto dal Prof. Bozhidar Velichkov*. Università di Pisa, 2023/2024.