



UNIVERSITÀ DI PISA

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA

Corso di Laurea Triennale in Matematica

La doppia bolla standard planare

Relatore:

Prof. Emanuele Paolini

Candidato:

Alessio Musto

ANNO ACCADEMICO 2025/2026

Indice

1	Introduzione al problema	4
1.1	Motivazioni	4
1.2	Calcolo del perimetro	7
1.3	Teorema di regolarità	8
2	Inversione	12
2.1	La proprietà su rette e circonferenze	14
2.2	Mappa Conforme	17
2.3	Condizione di somma nulla delle curvatures	20
2.4	Esistenza e unicità della doppia bolla standard	23
3	La doppia bolla standard è l'unico cluster di perimetro minimo	29
3.1	Una doppia bolla di perimetro minimo ha esterno connesso	31
3.2	Teorema principale sulla doppia bolla standard	38
4	Bibliografia	40

Capitolo 1

Introduzione al problema

1.1 Motivazioni

Il problema generale consiste nel trovare la superficie di area minima in $\mathbb{R}^N$ che racchiuda e separi $B_1, B_2, \dots, B_s \subset \mathbb{R}^N$ sottoinsiemi con volumi assegnati, per $N, s \in \mathbb{N}$. Nel caso planare ($N = 2$) il problema si riduce a minimizzare il perimetro, mentre le aree sono le misure dei sottoinsiemi da racchiudere. L'esempio classico e più antico è il cerchio, infatti è il modo migliore di racchiudere una sola area ($N = 2, s = 1$). Già i Greci avevano intuito la soluzione a questo problema, infatti Zenodoro dimostrò che il cerchio minimizza il perimetro di una certa area stabilita. Ad oggi si conoscono molte dimostrazioni diverse valide in dimensioni maggiori [4]. Adesso elenchiamo tutte le configurazioni ottimali che finora sono state dimostrate in $\mathbb{R}^2$.

Foisy, Alfaro, Brock, Hodges e Zimba [1] hanno dimostrato la configurazione migliore per racchiudere due aree: la doppia bolla standard.

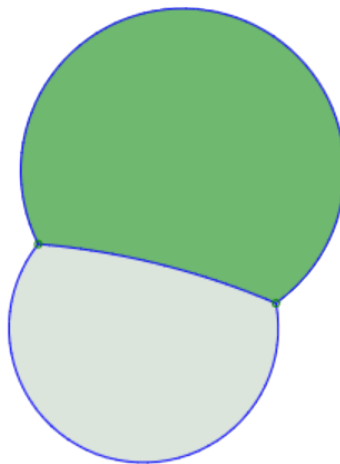


Figura 1.1: Esempio di doppia bolla standard. $N = 2, s = 2$

Il caso di tre aree fu dimostrato da Wachiramala [6] e la configurazione prende il nome di tripla bolla standard. Recentemente Lawlor [7] ha proposto una nuova dimostrazione valida anche sulla sfera.

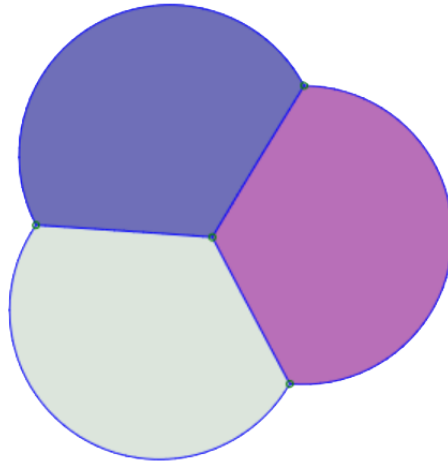


Figura 1.2: Esempio di tripla bolla standard. $N = 2; s = 3$

Negli ultimi anni è stata dimostrata da E. Paolini, A. Tamagnini [8] e V.M. Tortorelli [5] la configurazione migliore per separare quattro regioni con aree uguali, questa viene chiamata configurazione a "sandwich".

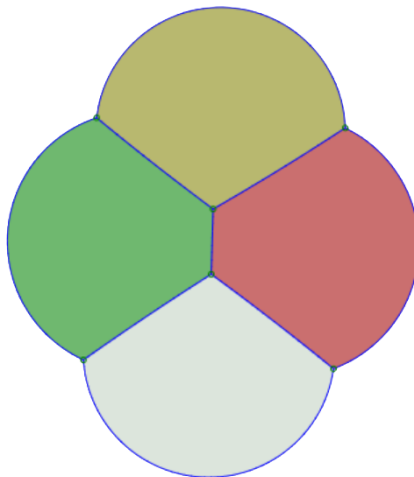


Figura 1.3: Configurazione a "sandwich"

Infatti la configurazione a "sandwich" nel caso delle quattro regioni

con aree uguali risulta avere un perimetro minore rispetto a quella a "rosetta", riportata sotto:

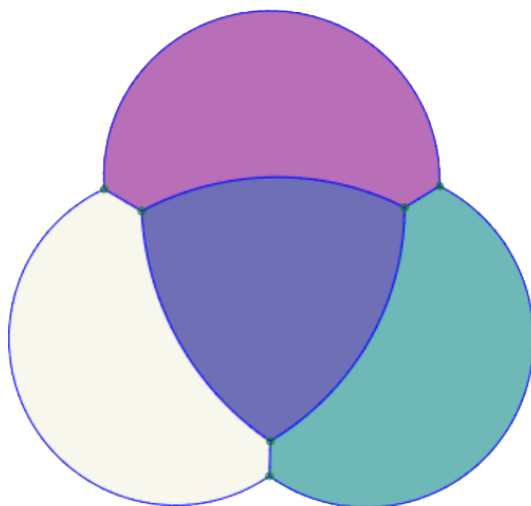


Figura 1.4: Configurazione a "rosetta"

Un altro risultato significativo dimostrato da Thomas C.Hales [10] è la partizione del piano in regioni di area uguale, infatti una configurazione ammissibile ha perimetro maggiore o uguale a quella esagonale a nido d'ape o "honeycomb".

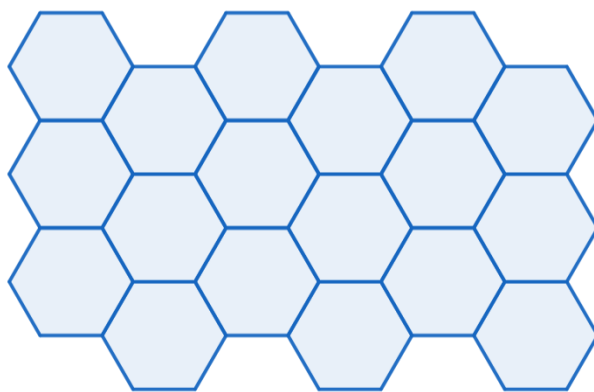


Figura 1.5: Configurazione "honeycomb"

Le configurazioni che realizzano il minimo hanno delle proprietà in comune che vedremo più avanti.

In particolare la tesi si concentra sulla doppia bolla standard in $\mathbb{R}^2$ e sulla dimostrazione che sia l'unico cluster di perimetro minimo.

In questo capitolo vengono introdotti gli strumenti necessari per riuscire a definire la doppia bolla standard e più in generale un cluster di perimetro minimo. I principali testi di riferimento del capitolo sono [1] e [12].

Nel capitolo 2 introduciamo la trasformazione "inversione" e dimostriamo alcune sue proprietà. Successivamente grazie alle proprietà dimostriamo che esiste ed è unica una doppia bolla standard per due qualsiasi aree. Questo capitolo si basa principalmente su [12] e [13].

Nel capitolo 3 enunciamo e dimostriamo il teorema principale della tesi: la doppia bolla standard è l'unico cluster di perimetro minimo. Viene seguito principalmente [1].

1.2 Calcolo del perimetro

Sia A un aperto non vuoto di $\mathbb{R}^2$, definiamo A come aperto C^1 a tratti se esiste un numero finito $r \in \mathbb{N}$ di cammini chiusi $\gamma_i : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ iniettivi di classe $C^1 \forall i = 1, \dots, r$ che parametrizzano il bordo, cioè $\bigcup_{i=1}^r \gamma_i(S^1) = \partial A$.

Definizione 1.2.1 (Cluster di bolle). *Sia $s \in \mathbb{N}$. Un cluster di bolle in $\mathbb{R}^2$ è una collezione finita di aperti C^1 a tratti a due a due disgiunti $B_1, B_2, \dots, B_s$ con anche $B_0 := \mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{j=1}^s \overline{B_j}$ aperto C^1 a tratti. Ogni insieme aperto $B_1, \dots, B_s$ si chiama bolla, mentre B_0 si chiama esterno o regione esterna.*

Osservazione 1. *Non è richiesto che le bolle siano connesse.*

Un cluster composto da due bolle è chiamato doppia bolla, mentre quando è composto da tre bolle è chiamato tripla bolla.

In generale definiamo $A_i := |B_i|$, cioè l'area della i -esima bolla per $i = 1, \dots, s$.

Definizione 1.2.2 (Cluster connesso). *Un cluster si dice connesso se l'esterno B_0 è connesso e tutte le bolle $B_1, B_2, \dots, B_s$ che lo compongono sono connesse. Altrimenti se esiste $j \in 0, \dots, s$ tale che B_j è sconnesso allora il cluster è sconnesso.*

Calcoliamo il perimetro di un cluster di bolle $B_1, B_2, \dots, B_s$ come la lunghezza delle curve che parametrizzano il bordo di $\bigcup_{i=1}^s B_i$, infatti è

ancora un aperto C^1 a tratti poiché l'unione finita di aperti C^1 a tratti è ancora un aperto C^1 a tratti.

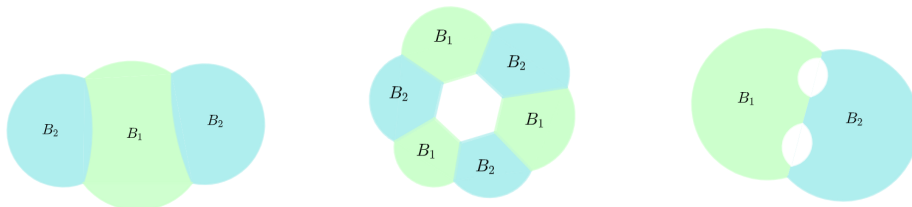


Figura 1.6: Esempi di bolle e/o esterno sconnesso

1.3 Teorema di regolarità

F.J. Algreem [2] e Frank Morgan [3] hanno dimostrato in generale l'esistenza di cluster di bolle con perimetro minimo, in particolare i loro risultati forniscono proprietà specifiche sulle configurazioni che realizzano il minimo.

Definizione 1.3.1 (Cluster di perimetro minimo). *Un cluster è di perimetro minimo se non esiste un altro cluster che racchiude le stesse aree ma con perimetro minore.*

Osservazione 2. *Più avanti sarà utile introdurre un'orientazione per le curvature k delle curve che compongono il cluster e quindi un segno associato. Per convenzione la curvatura è positiva $k > 0$ quando percorrendo la curva orientata ci spostiamo verso sinistra, mentre la curvatura è negativa $k < 0$ quando ci spostiamo verso destra.*

Teorema 1 (Teorema di regolarità). *Un cluster di perimetro minimo è composto da un numero finito di archi di circonferenza o segmenti che separano regioni differenti e si incontrano a tre a tre in nodi, formando angoli di 120° . Inoltre se k_1, k_2, k_3 sono le curvature orientate dei tre archi di circonferenza che terminano in un nodo, allora $k_1 + k_2 + k_3 = 0$*

Osservazione 3. *Infatti nelle configurazioni di perimetro minimo elencate in precedenza tutti gli archi si incontrano a tre a tre in dei nodi, formando angoli di 120° .*

Definizione 1.3.2 (Doppia bolla standard in $\mathbb{R}^2$). *In $\mathbb{R}^2$ una doppia bolla si dice standard se è composta da tre archi di circonferenza che si incontrano in due nodi con angoli di 120° . Eventualmente uno di questi può essere un segmento, ma per semplicità verrà comunque chiamato arco di circonferenza.*

Segue da come è stato definito precedentemente che il perimetro della doppia bolla standard è la somma della lunghezza degli archi di cerchio.

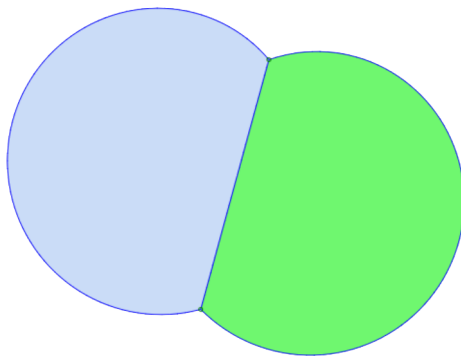


Figura 1.7: Esempio di doppia bolla standard con aree uguali

Un'altra proprietà rilevante dei cluster di perimetro minimo riguarda le pressioni $p_1, \dots, p_s$ associate ad ognuna delle regioni $B_1, \dots, B_s$, per convenzione la regione esterna B_0 ha pressione $p_0 = 0$. Indichiamo con k_{ij} la curvatura dell'arco che separa B_i da B_j $i \neq j$, se conosciamo una delle due pressioni, senza perdita di generalità supponiamo di conoscere p_i , possiamo definire la pressione della j -esima bolla $p_j := k_{ij} + p_i$. Segue che è possibile determinare immediatamente la pressione delle bolle che condividono un arco con l'esterno:

$$p_j = k_{0j} + p_0 = k_{0j}$$

A questo punto possiamo ottenere la pressione delle bolle che hanno un arco separante con una bolla di cui abbiamo già ottenuto la pressione, reiterando arriviamo ad associare una pressione a tutte le bolle.

In particolare per definire la pressione di una bolla è sufficiente trovare un cammino da una bolla di cui si conosce la pressione, questo è sempre possibile perché per convenzione la pressione della regione esterna è nota. Resta da verificare la buona definizione:

Proposizione 2. *Sia E un cluster di perimetro minimo composto da $s \in \mathbb{N}$ bolle $B_1, \dots, B_s$. Se γ è un cammino semplice chiuso che attraversa gli archi del cluster E senza passare per i nodi, allora la somma delle curvature orientate degli archi attraversati da γ è nulla.*

Dimostrazione. Consideriamo un cammino chiuso γ che attraversa il cluster di perimetro minimo E . Il cammino chiuso γ divide in due parti il piano, chiamiamo interno di γ la componente connessa limitata delle due. Indichiamo con $v_1, \dots, v_t$ $t \in \mathbb{N}$ i nodi all'interno di γ e γ_i $i = 1, \dots, t$ le curve chiuse attorno a v_i , ovvero dei cammini sufficientemente piccoli in modo da attraversare solo i tre archi che si incontrano nel nodo v_i e nessun altro arco.

Adesso osserviamo che la somma delle curvature orientate degli archi attraversati da γ è uguale alla somma delle curvature orientate degli archi attraversati da $\bigcup_{i=1}^t \gamma_i$. Infatti un arco attraversato da $\bigcup_{i=1}^t \gamma_i$ può essere:

- attraversato da un solo cammino γ_k $k \in \{1, \dots, t\}$: questo accade se e soltanto se è attraversato da γ ;
- attraversato da due cammini γ_i, γ_j $i \neq j$: in questo caso per costruzione l'arco è interno a γ e viene percorso due volte (una per i e una per j) con orientazione opposta, per cui la somma delle due curvature orientate si annulla.

La somma delle curvature orientate degli archi attraversati da $\bigcup_{i=1}^t \gamma_i$ è nulla, infatti dal teorema di regolarità la somma delle curvature orientate dei tre archi che si incontrano in v_i è nulla per ogni $i = 1, \dots, t$. Quindi anche la somma delle curvature orientate degli archi attraversati da γ è nulla. $\square$

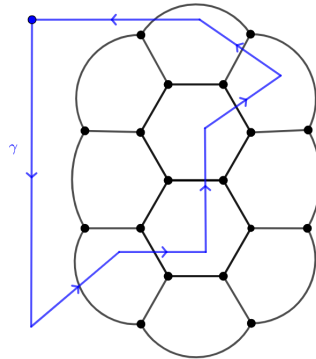


Figura 1.8: Cammino chiuso γ in un cluster di perimetro minimo E

Osservazione 4. *La pressione associata a una bolla B_i è ben definita. Infatti supponiamo di avere due cammini distinti γ_1, γ_2 che collegano l'esterno B_0 con la bolla B_i , percorrendo prima γ_1 e poi $-\gamma_2$ otteniamo un cammino chiuso. Dalla proposizione precedente la somma delle curvature orientate degli archi attraversati è nulla, quindi la somma delle curvature orientate degli archi attraversati da γ_1 coincide con la somma di quelli attraversati da γ_2 .*

Capitolo 2

Inversione

Per questo capitolo seguiamo principalmente [12] e [13] come testi di riferimento. Ricordiamo delle nozioni di analisi complessa che ci saranno utili per questo capitolo.

Definizione 2.0.1 (funzione olomorfa). *Sia $U \subset \mathbb{C}$ un sottoinsieme aperto. Una funzione $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ è olomorfa in $z_0 \in U$ se esiste il limite $f'(z_0) := \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ e tale limite è finito.*

Se f olomorfa in $z_0 \forall z_0 \in U$, diciamo f olomorfa in U .

In generale scriviamo $z = x + iy$ con $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tale che $(x, y) = (\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z))$

Proposizione 3. *Sia $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z_0 \in U$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

- f olomorfa in z_0
- f differenziabile (vista su $\mathbb{R}$ attraverso la naturale identificazione tra $\mathbb{C}$ e $\mathbb{R}^2$) in z_0 e
$$\begin{cases} \frac{\partial \operatorname{Re}(f)}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial \operatorname{Im}(f)}{\partial y}(z_0) \\ \frac{\partial \operatorname{Re}(f)}{\partial y}(z_0) = -\frac{\partial \operatorname{Im}(f)}{\partial x}(z_0) \end{cases}$$
Sono dette equazioni di Cauchy-Riemann.

Adesso introduciamo l'insieme delle trasformazioni di Möbius:

$$M = \{F : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\} \mid F(z) = \frac{az + b}{cz + d}, a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc \neq 0\}$$

dove:

- $F(-\frac{d}{c}) = \infty$ se $c \neq 0$

$$\bullet F(\infty) = \begin{cases} \infty & \text{se } c = 0 \\ \frac{a}{c} & \text{se } c \neq 0 \end{cases}$$

Definiamo $\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

Osservazione 5. Sia $F \in M$ una trasformazione di Möbius, allora F è continua su $\hat{\mathbb{C}}$ dotato della seguente topologia:

Un insieme $U \subset \hat{\mathbb{C}}$ è aperto se:

- $U \subset \mathbb{C}$ aperto
- $\infty \in U$ e $\mathbb{C} \setminus U$ è compatto in $\mathbb{C}$

La continuità in $\mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$ è immediata.

La continuità su $\hat{\mathbb{C}}$ segue da come sono state definite le funzioni in $-\frac{d}{c}, \infty$.

Osservazione 6. Sia $F \in M$ una trasformazione di Möbius allora F è un omeomorfismo su $\hat{\mathbb{C}}$. Sappiamo F continua, inoltre la sua inversa $F^{-1}(z) = \frac{dz-b}{-cz+a} \in M$ è continua. La condizione affinché $F^{-1} \in M$, ovvero da $-bc \neq 0$, è verificata poiché è la stessa di $F \in M$: $ad - bc \neq 0$.

Ci interessa in particolare una mappa in M , la seguente:

$$T : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}} \\ z \mapsto \frac{1}{z}$$

è chiamata inversione. La mappa possiede alcune proprietà interessanti: è conforme diretta e trasforma rette e circonferenze in rette o circonferenze.

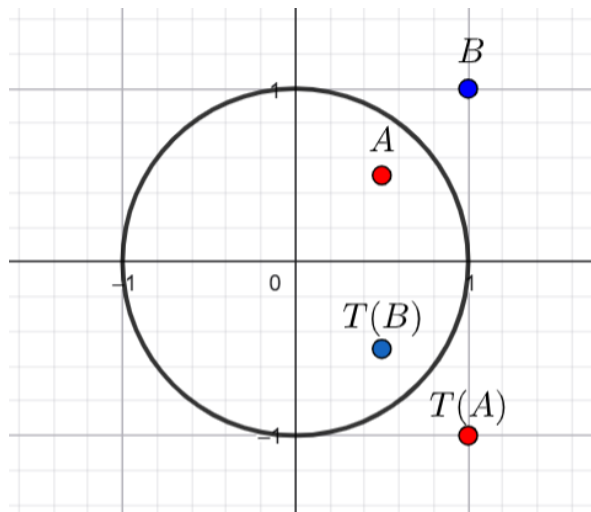


Figura 2.1: La mappa inversione valutata in $A = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ e in $B = 1 + i$

Nelle prossime sezioni dimostreremo queste proprietà.

Prima di dare la definizione di mappa conforme dobbiamo trattare un caso particolare: quando parliamo di un angolo tra due curve con vertice all'infinito.

Definizione 2.0.2 (Angolo con vertice all'infinito). *Due curve continue γ_1 e γ_2 nel piano complesso esteso formano un angolo α con vertice all'infinito se e solo se le loro immagini nel piano complesso esteso tramite la trasformazione $T(z) = \frac{1}{z}$ formano un angolo α con vertice nell'origine.*

Definizione 2.0.3 (Mappa conforme). *Sia $\Omega \subset \hat{\mathbb{C}}$ diciamo che $f : \Omega \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ è una mappa conforme in $p \in \Omega$ se f conserva l'ampiezza degli angoli delle curve che passano in p . In particolare diciamo che una mappa f è conforme in Ω se f è una mappa conforme $\forall p \in \Omega$.*

Definizione 2.0.4 (Mappa conforme diretta). *Se $f : \Omega \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ conforme in p conserva anche l'orientazione diciamo che f è una mappa conforme diretta in p . In particolare diciamo che è una mappa conforme diretta in Ω se è una mappa conforme diretta $\forall p \in \Omega$.*

Osservazione 7. *Sia f differenziabile in $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, la condizione di preservare l'orientamento è equivalente a $\det Df(x) > 0 \forall x \in \Omega$, dove Df è la matrice Jacobiana di f .*

2.1 La proprietà su rette e circonferenze

Proposizione 4. *L'inversione $F(z) = \frac{1}{z}$ trasforma rette R e circonferenze C in rette e circonferenze nel seguente modo:*

1. *Se C è una circonferenza con centro c e raggio r , e non passa per $(0,0)$ allora $F(C)$ è una circonferenza con centro $\frac{\bar{c}}{|c|^2 - r^2}$ e raggio $\frac{r}{||c|^2 - r^2|}$*
2. *Se C è una circonferenza con centro c e raggio r , passa per $(0,0)$ e c non è sull'asse dei numeri reali allora $F(C)$ è una retta con pendenza $\frac{\operatorname{Re}(c)}{\operatorname{Im}(c)}$ e intercetta l'asse dei numeri immaginari in $q = -\frac{1}{2\operatorname{Im}(c)}$*
3. *Se C è una circonferenza con centro c e raggio r , passa per $(0,0)$ e c è sull'asse dei numeri reali (ma non è l'origine) allora $F(C)$ è la retta verticale con equazione $z + \bar{z} = \frac{1}{\operatorname{Re}(c)}$*

4. Se R è una retta con pendenza m e $q \neq 0$ intercetta sull'asse y allora $F(C)$ è la circonferenza con centro $c = \frac{-m-i}{2q}$ e raggio $r = \frac{\sqrt{m^2+1}}{2|q|}$
5. Se R è una retta con pendenza m e $q = 0$ intercetta sull'asse y allora $F(C)$ è una retta con pendenza $-m$ e intercetta sull'asse y $q = 0$
6. Se R è una retta verticale con equazione $z + \bar{z} = 2k$ e $k \neq 0$ allora $F(C)$ è la circonferenza con centro $c = \frac{1}{2k}$ e raggio $r = \frac{1}{2|k|}$
7. Se R ha equazione $x = 0$ allora $F(R)$ mantiene la solita equazione.

Dimostrazione. Sia $z = x + iy$. Innanzitutto richiamiamo l'equazione della circonferenza con centro $c \in \mathbb{C}$ e a raggio r :

$$\begin{aligned} |z - c|^2 &= r^2 \\ (z - c)(\bar{z} - \bar{c}) &= r^2 \\ z \cdot \bar{z} - z \cdot \bar{c} - \bar{z} \cdot c + |c|^2 - r^2 &= 0 \end{aligned}$$

Riscriviamo anche la retta di equazione $y = mx + q$ con m la pendenza e q l'intercetta sull'asse y , se non è verticale:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(z) &= m \operatorname{Re}(z) + q \\ \frac{z - \bar{z}}{2i} &= m \cdot \frac{z + \bar{z}}{2} + q \\ z(1 - im) - \bar{z}(1 + im) - 2iq &= 0 \end{aligned}$$

Mentre se la retta è verticale con equazione $x = k$ allora la riscriviamo in z : $z + \bar{z} = 2k$.

Proviamo i punti 1,2,3 dell'enunciato.

Se applichiamo l'inversione su z , l'equazione della circonferenza diventa:

$$(|c|^2 - r^2)z \cdot \bar{z} - z \cdot c - \bar{z} \cdot \bar{c} + 1 = 0 \quad (2.1)$$

Se $(|c|^2 - r^2) \neq 0$, dividiamo (2.1) per $(|c|^2 - r^2)$ e otteniamo:

$$z \cdot \bar{z} - z \cdot \frac{c}{(|c|^2 - r^2)} - \bar{z} \cdot \frac{\bar{c}}{(|c|^2 - r^2)} + \frac{1}{(|c|^2 - r^2)} = 0$$

Questa è l'equazione della circonferenza con centro $\frac{\bar{c}}{|c|^2 - r^2}$ e raggio $\frac{r}{||c|^2 - r^2|}$. Se $(|c|^2 - r^2) = 0$ cioè la circonferenza passa per l'origine O , allora (2.1) diventa la retta:

$$z \cdot c + \bar{z} \cdot \bar{c} - 1 = 0$$

Moltiplicando per i :

$$z \cdot (ic) + \bar{z} \cdot (i\bar{c}) - i = 0$$

Dove $ic = -(\text{Im}(c) - i \text{Re}(c))$ e $i\bar{c} = (\text{Im}(c) + i \text{Re}(c))$. Da qua si sviluppano due casi $\text{Im}(c) \neq 0$ e $\text{Im}(c) = 0$

Se $\text{Im}(c) \neq 0$ cioè il centro della circonferenza non sta sull'asse dei numeri reali, l'equazione precedente diventa:

$$z \cdot (1 - i \frac{\text{Re}(c)}{\text{Im}(c)}) - \bar{z} \cdot (1 + i \frac{\text{Re}(c)}{\text{Im}(c)}) - 2i(-\frac{1}{2\text{Im}(c)}) = 0$$

l'equazione sopra corrisponde alla retta con $m = \frac{\text{Re}(c)}{\text{Im}(c)}$ e $q = -\frac{1}{2\text{Im}(c)}$

Invece se $\text{Im}(c) = 0$ cioè il centro della circonferenza è sull'asse dei numeri reali, l'equazione (2.1) diventa:

$$z \cdot \text{Re}(c) + \bar{z} \cdot \text{Re}(c) - 1 = 0$$

Siccome siamo nel caso in cui la circonferenza passa per l'origine e ha centro sull'asse dei numeri reali, abbiamo $|\text{Re}(c)| = r$. Siccome $r > 0$ allora $\text{Re}(c)$ è diverso da 0. Quindi è l'equazione della retta verticale:

$$z + \bar{z} = \frac{1}{\text{Re}(c)}$$

Proseguiamo con la dimostrazione dei punti 4 e 5.

Applichiamo l'inversione e l'equazione della retta diventa:

$$\bar{z} \cdot (1 - im) - z(1 + im) - 2iq\bar{z} \cdot z = 0 \quad (2.2)$$

Se $q \neq 0$ dividiamo per $-2iq$ e otteniamo:

$$z \cdot \bar{z} - z \cdot (-\frac{m}{2q} + \frac{i}{2q}) - \bar{z} \cdot (-\frac{m}{2q} - \frac{i}{2q}) = 0$$

Questa è l'equazione della circonferenza con centro $c = -\frac{m}{2q} - \frac{i}{2q}$ e che passa per l'origine. Perciò il raggio $r = |-\frac{m}{2q} - \frac{i}{2q}| = \frac{\sqrt{m^2+1}}{|2q|}$

Se $q = 0$ allora la retta R passa per l'origine O . Segue da (2.2) l'equazione di $F(R)$:

$$\bar{z} \cdot (1 - im) - z(1 + im) = 0$$

Questa è l'equazione della retta che passa per l'origine O e con pendenza $-m$.

Infine dimostriamo i punti 6) e 7). Se applichiamo l'inversione l'equazione della retta verticale diventa:

$$\bar{z} + z = 2k \cdot \bar{z} \cdot z \quad (2.3)$$

Se $k \neq 0$ dividiamo per $2k$ e otteniamo:

$$\bar{z} \cdot z - z \cdot \frac{1}{2k} - \bar{z} \cdot \frac{1}{2k} = 0$$

Questa è l'equazione della circonferenza con centro $c = \frac{1}{2k}$ che passa per l'origine, quindi con raggio $r = |\frac{1}{2k}|$.

Se $k = 0$ l'equazione (2.3) di $F(R)$ è identica a quella di R :

$$\bar{z} + z = 0$$

□

2.2 Mappa Conforme

Adesso vogliamo utilizzare la seguente proposizione per dimostrare che la mappa $z \mapsto \frac{1}{z}$ è conforme. Usiamo la naturale identificazione tra $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{C}$.

Proposizione 5. *Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione olomorfa in Ω con $f'(z) = \frac{df(z)}{dz} \neq 0 \forall z \in \Omega$ allora f è una mappa conforme diretta in Ω*

Dimostrazione. Denotiamo $z = x + iy \forall z \in \Omega$ e $f(z) = P(z) + iQ(z)$ allora $f(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$.

Siccome f è olomorfa su Ω e $f'(z) \neq 0 \forall z \in \Omega$, segue dalle condizioni di Cauchy-Riemann che $\det Df(x, y) = |f'(z)|^2 > 0$. Infatti

$$\det Df(x, y) = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial P(x, y)}{\partial x} & \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \\ \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} & \frac{\partial Q(x, y)}{\partial y} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial P(x, y)}{\partial x} & -\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} \\ \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} & \frac{\partial P(x, y)}{\partial x} \end{bmatrix}$$

e inoltre, $f'(z) = \frac{\partial P(x, y)}{\partial x} + i \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$ dalla definizione di derivata complessa:

$$f'(z) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{C}}} \frac{f(z + h) - f(z)}{h}$$

prendendo il limite sull'asse reale, cioè $h \in \mathbb{R}$.

Proviamo adesso che la mappa f conserva gli angoli. Sia $\gamma : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^2$ con $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ tale che $\gamma(0) = z = x + iy = (x, y)$ e $v = \gamma'(0) \neq 0$. Adesso calcoliamo il vettore tangente $\tilde{v}$ in 0 alla mappa $f \circ \gamma$:

$$\begin{aligned} \tilde{v} &= \left. \frac{d(f \circ \gamma(t))}{dt} \right|_{t=0} = Df(x, y) \cdot \gamma'(0) = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial P(x, y)}{\partial x} & -\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} \\ \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} & \frac{\partial P(x, y)}{\partial x} \end{bmatrix} \cdot \gamma'(0) = \\ &= \left(\frac{\partial P(x, y)}{\partial x} \cdot \gamma'_1(0) - \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} \cdot \gamma'_2(0), \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} \cdot \gamma'_1(0) + \frac{\partial P(x, y)}{\partial x} \cdot \gamma'_2(0) \right) = \\ &= f'(z) \cdot v \end{aligned}$$

Per ipotesi $f'(z) \neq 0 \forall z \in \mathbb{C}$ e quindi:

$$f'(z) = |f'(z)|e^{i\theta(z)}$$

$$v = |v|e^{i\bar{\theta}}$$

Da cui segue:

$$\tilde{v} = |f'(z)| |v| e^{i(\theta(z) + \bar{\theta})}$$

Quindi $\tilde{v}$ si ottiene da contrarre o espandere v per un fattore $|f'(z)|$ e ruotarlo per un angolo $\theta(z)$. L'angolo $\theta(z)$ dipende solo da z e non dalla curva γ . Perciò date due curve $\tilde{\gamma}_1$ e $\tilde{\gamma}_2$ in z con vettori tangenti rispettivamente v_1, v_2 e i vettori tangenti $\tilde{v}_1, \tilde{v}_2$ rispettivamente a $f \circ \tilde{\gamma}_1, f \circ \tilde{\gamma}_2$ differiscono da v_1 e v_2 per lo stesso angolo $\theta(z)$. Per cui se v_1 e v_2 definiscono un angolo α allora anche $\tilde{v}_1$ e $\tilde{v}_2$ definiscono lo stesso angolo α . $\square$

Da questa proposizione non possiamo ancora concludere che l'inversione è conforme sul piano complesso esteso, bisogna aggiungere altro per concludere.

Teorema 6. *Sia $F \in M$ una trasformazione di Möbius, allora F è una mappa conforme diretta nel piano complesso esteso.*

Dimostrazione. Per la proposizione precedente la mappa è conforme diretta su $\mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$, infatti:

$$f'(z) = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2} \neq 0, \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$$

Restano da studiare i casi $z = -\frac{d}{c}$ e $z = \infty$

Iniziamo con $z = -\frac{d}{c}$. Sappiamo che $c \neq 0$ altrimenti $z = \infty$. Siano γ_1 e γ_2 le due curve che formano un angolo θ nel vertice $\delta = -\frac{d}{c}$, indichiamo con Γ_1 e Γ_2 rispettivamente le immagini delle curve γ_1 e γ_2 secondo la nostra trasformazione di Möbius $w = F(z)$. Vogliamo dimostrare che le curve Γ_1 e Γ_2 formano un angolo θ con vertice all'infinito e mantengono la stessa orientazione. Per dimostrarlo vogliamo usare la definizione e applichiamo la trasformazione:

$$\eta = 1/w$$

Le curve Γ_1 e Γ_2 vengono mandate da η nelle curve Γ_1^* e Γ_2^* con vertice nell'origine.

Naturalmente possiamo mandare anche le curve γ_1 e γ_2 nelle curve Γ_1^* e Γ_2^* :

$$\eta = \frac{cz + d}{az + b}$$

La trasformazione η è conforme diretta in $z = \delta = -\frac{d}{c}$ perché η è conforme diretta in $\mathbb{C} \setminus \{-\frac{b}{a}\}$ (sappiamo $-\frac{b}{a} \neq -\frac{d}{c}$ è verificata per la condizione delle trasformazioni di Möbius $ad - bc \neq 0$). Quindi le curve Γ_1^* e Γ_2^* formano un angolo θ nell'origine e mantengono la stessa orientazione, per definizione le curve Γ_1 e Γ_2 formano un angolo θ con vertice all'infinito. Quindi la mappa F è conforme diretta in $z = \delta = -\frac{d}{c}$.

Infine resta il caso $z = \infty$. Si procede analogamente al caso precedente e definiamo γ_1 e γ_2 due curve che formano un angolo θ all'infinito. Sia $w = F(z)$ una trasformazione di Möbius che manda le curve γ_1 e γ_2 nelle curve Γ_1 e Γ_2 che formano un vertice nel punto A . Visto che le curve γ_1 e γ_2 formano un angolo θ con vertice all'infinito, segue dalla definizione che le loro immagini γ_1^* e γ_2^* secondo la trasformazione $\xi = \frac{1}{z}$ formano un angolo θ nell'origine con stessa orientazione.

Possiamo naturalmente andare direttamente dalle curve γ_1^* e γ_2^* nelle curve Γ_1 e Γ_2 secondo la trasformazione di Möbius

$$w = F(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{a\frac{1}{\xi} + b}{c\frac{1}{\xi} + d} = \frac{a + b\xi}{c + d\xi}$$

che è conforme diretta nel punto $\xi = 0$ per quanto dimostrato. Segue che le curve Γ_1 e Γ_2 formano un angolo θ nel vertice $A = \frac{a}{c}$ e mantengono la stessa orientazione, quindi la mappa F è conforme diretta in $z = \infty$.

□

Corollario 1. *L'inversione è una mappa conforme diretta sul piano complesso esteso.*

2.3 Condizione di somma nulla delle curvature

Siano $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ tre archi di circonferenza, avere la somma delle curvature nulla $k_1 + k_2 + k_3 = 0$ è una condizione importante.

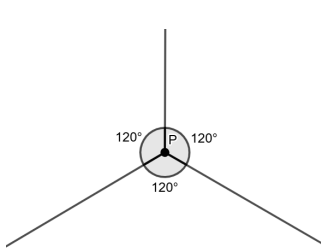
Lemma 7. *Sia P il vertice dove tre archi di circonferenza si incontrano con angoli di 120° .*

Allora la somma delle tre curvature è nulla se e solo se i tre archi di circonferenza si incontrano in un unico punto $Q (\neq P)$, formando una doppia bolla standard nel piano esteso $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$

Dimostrazione. Sia P il punto dove si incontrano i tre archi con angoli di 120° .

$\Rightarrow$) Se due archi sono di curvatura nulla (cioè rette) allora anche il terzo avrà curvatura nulla, otteniamo quindi tre rette che si incontrano all'infinito (caso (a) figura sotto).

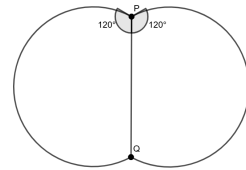
Se un solo arco ha curvatura nulla, quindi gli altri due archi devono avere la stessa curvatura. I casi possibili sono soltanto due (caso (b) e caso (c) della figura sotto) e in entrambi i casi sono doppie bolle standard nel piano complesso esteso.



(a) Tutti gli archi hanno curvatura nulla



(b) Un solo arco ha curvatura nulla



(c) Un solo arco ha curvatura nulla

Infine se tutti gli archi hanno curvatura non nulla, chiamiamo $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, gli archi. Supponiamo senza perdita di generalità che γ_1 e γ_2 si incontrino

in un punto Q , dobbiamo dimostrare che γ_3 intersechi le altre due curve in Q . Consideriamo l'arco c del cerchio C che passa per P e Q ed ha la stessa direzione di γ_3 (si intende che hanno lo stesso vettore tangente in P e quindi stesso vettore di percorrenza). Indichiamo con $k(l)$ la curvatura rispetto all'arco di circonferenza l . Vogliamo mostrare $k(\gamma_3) = k(c)$, infatti se dimostriamo questo otteniamo due archi con stessa curvatura che passano per P con la stessa orientazione e quindi devono coincidere $\gamma_3 = c$. Da questo segue la tesi visto che γ_3 passa per Q . Dimostriamo $k(\gamma_3) = k(c)$, dalla nostra convenzione sui segni delle curvature orientate:

$$k(\gamma_1) - k(\gamma_2) - k(\gamma_3) = 0$$

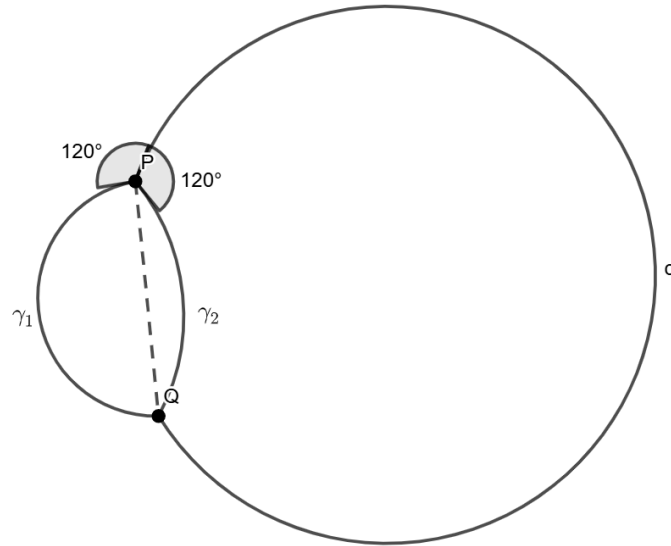
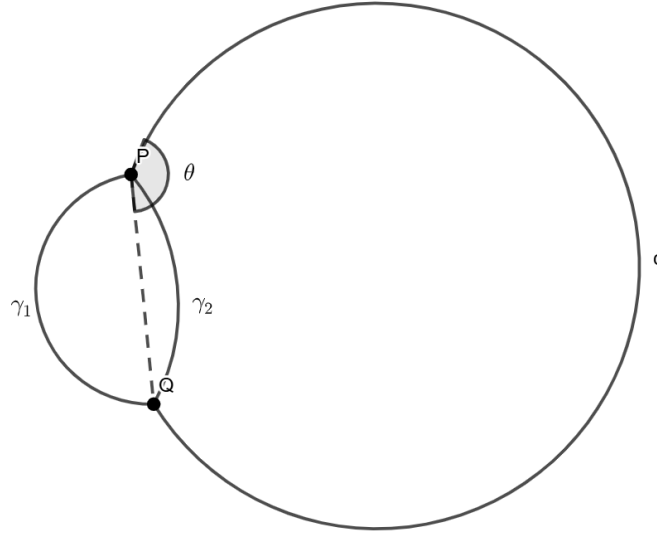


Figura 2.3: Definiamo gli archi γ_1 , γ_2 e c come in figura

Se dimostriamo:

$$k(\gamma_1) - k(\gamma_2) - k(c) = 0$$

abbiamo $k(c) = k(\gamma_3)$. Indichiamo con $d(P, Q)$ la distanza tra il punto P e il punto Q e con θ l'angolo tra il segmento che congiunge P con Q e l'arco c


 Figura 2.4: Angolo θ e il segmento tratteggiato PQ

Possiamo scrivere la curvatura degli archi in funzione di θ e $d(P, Q)$:

$$k(c) = \frac{2 \sin \theta}{d(P, Q)}$$

$$k(\gamma_1) = \frac{2 \sin(2\pi - \frac{2\pi}{3} - \theta)}{d(P, Q)} = -\frac{2 \sin(\frac{2\pi}{3} + \theta)}{d(P, Q)}$$

$$k(\gamma_2) = \frac{2 \sin(\theta - \frac{2\pi}{3})}{d(P, Q)}$$

Osserviamo che la loro somma è nulla :

$$\begin{aligned} k(\gamma_1) - k(\gamma_2) - k(c) &= \frac{-2}{d(P, Q)} \cdot (\sin(\frac{2\pi}{3} + \theta) + \sin(\theta - \frac{2\pi}{3}) + \sin \theta) = \\ &= \frac{-2}{d(P, Q)} \cdot (\frac{\sqrt{3} \cos \theta}{2} - \frac{\sin \theta}{2} - \frac{\sin \theta}{2} - \frac{\sqrt{3} \cos \theta}{2} + \sin \theta) = 0 \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow$) Rappresentiamo le curvature come visto nell'implicazione precedente, sapendo che gli archi formano angoli di 120° . Abbiamo già visto:

$$\sin(\frac{2\pi}{3} + \theta) + \sin(\theta - \frac{2\pi}{3}) + \sin \theta = 0 \quad \forall \theta$$

da cui segue la tesi. □

Dal lemma segue questo importante corollario:

Corollario 2. *Siano $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ tre archi come nel lemma. La condizione $k(\gamma_1) + k(\gamma_2) + k(\gamma_3) = 0$ è invariante secondo l'inversione T .*

Dimostrazione. Abbiamo dimostrato che l'inversione T trasforma rette e cerchi in rette e cerchi, inoltre è una mappa conforme diretta e preserva l'orientazione degli angoli. Quindi una doppia bolla standard viene mandata in un'altra doppia bolla standard, dal lemma precedente abbiamo la tesi. $\square$

2.4 Esistenza e unicità della doppia bolla standard

Montesinos ha dimostrato [16] l'esistenza e unicità di configurazioni standard di s bolle in $\mathbb{R}^N$ con $s \leq N + 1$ che racchiudono volumi (aree nel nostro caso) assegnati, sfruttando l'inversione T .

Consideriamo ora il caso di interesse, ossia $s = 2$ e $N = 2$.

Innanzitutto introduciamo le seguenti definizioni:

Definizione 2.4.1 (Strettamente monotona). *Una funzione*

$$f : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

si dice strettamente monotona se vale una delle due seguenti proprietà:

- *Se per ogni $x_1, x_2 \in X$ tale che $x_1 < x_2$ allora $f(x_1) < f(x_2)$ ed in tal caso si dice strettamente crescente;*
- *Se per ogni $x_1, x_2 \in X$ tale che $x_1 < x_2$ allora $f(x_1) > f(x_2)$ ed in tal caso si dice strettamente decrescente.*

Osservazione 8. *In particolare una funzione strettamente monotona è iniettiva. Quindi se una funzione è strettamente crescente o strettamente decrescente vale anche la doppia implicazione, infatti:*

- *f strettamente crescente, allora per ogni $x_1, x_2 \in X$: $x_1 < x_2 \iff f(x_1) < f(x_2)$;*
- *f strettamente decrescente, allora per ogni $x_1, x_2 \in X$: $x_1 < x_2 \iff f(x_1) > f(x_2)$*

Definizione 2.4.2 (Raggi di una doppia bolla standard). *Siano B_1 e B_2 le bolle di una doppia bolla standard e siano $\tilde{k}, \bar{k}$ le curvature degli archi di circonferenza che separano la regione esterna B_0 rispettivamente dalla bolla B_1, B_2 .*

Allora si definiscono i raggi delle bolle B_1, B_2 come:

$$r_{B_1} = \frac{1}{\tilde{k}} \quad r_{B_2} = \frac{1}{\bar{k}}$$

Date due aree qualsiasi, vogliamo dimostrare che esiste un'unica doppia bolla standard (a meno di congruenza).

Inizialmente prendiamo una doppia bolla standard con aree uguali, sappiamo che esiste per la simmetria tra le bolle. Chiamiamo A_1, A_2 le due aree limitate racchiuse dalla doppia bolla standard.

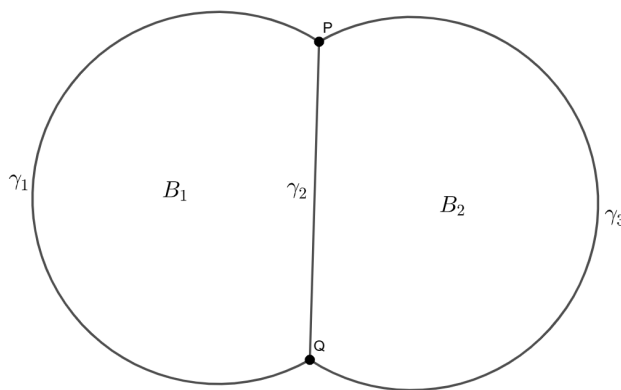


Figura 2.5: Costruzione esplicita

Siano P e Q i suoi nodi, senza perdita di generalità possiamo supporre $Q = 0$, infatti attraverso la traslazione possiamo metterci sempre in questa condizione. Chiamiamo l'inversione T , che ricordiamo essere la mappa:

$$\begin{aligned} T : \hat{\mathbb{C}} &\rightarrow \hat{\mathbb{C}} \\ z &\mapsto 1/z \end{aligned}$$

Da come è stata definita la mappa $T(Q) = \infty$, inoltre sappiamo che l'inversione manda rette e circonferenze in rette e circonferenze. Siccome gli archi di circonferenza passano per l'origine:

$$T(\gamma_1) = r_1$$

$$T(\gamma_2) = r_2$$

$$T(\gamma_3) = r_3$$

dove r_1, r_2, r_3 sono rette che hanno come punto in comune $T(P)$.

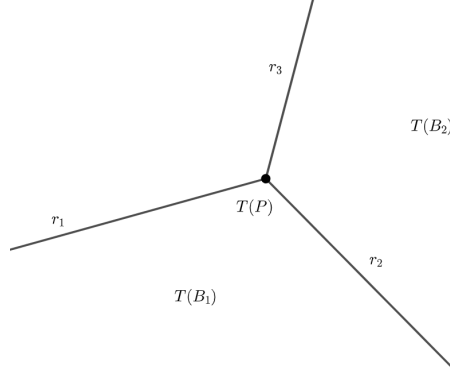


Figura 2.6: $r_1 = T(\gamma_1)$, $r_2 = T(\gamma_2)$, $r_3 = T(\gamma_3)$

Spostare il punto P lungo la curva γ_3 è equivalente a spostare il punto $T(P)$ lungo la retta r_3 .

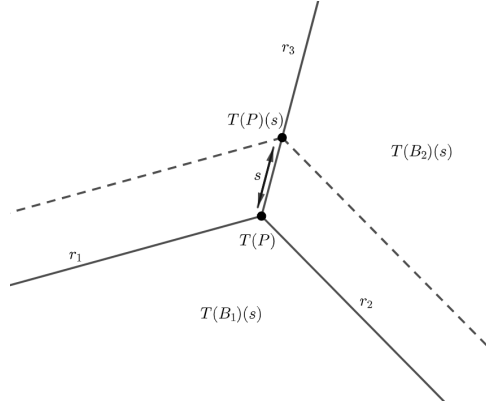


Figura 2.7: Cosa succede se spostiamo $T(P)$ lungo r_3

Infatti indichiamo con $\tilde{P}(s) = T(P)(s)$ la posizione del punto lungo la retta r_3 e fissiamo $\tilde{P}(0) = T(P)(0) = T(P)$. Quando siamo al tempo $s = 0$ se spostando il punto $T(P)$ si espande $T(B_1)$ e si contrae $T(B_2)$ siamo nella semiretta di r_3 che viene parametrizzata con tempi positivi $s > 0$, se succede il contrario allora è parametrizzata con tempi negativi $s < 0$.

Consideriamo ora le regioni $T(B_1(s)), T(B_2(s))$ al variare del parametro

s , applicando l'inversa di $T^{-1}(=T)$ otteniamo le bolle della doppia bolla standard (corollario 2 e lemma 7) al variare del parametro s :

$$B_1(s) := T(T(B_1)(s))$$

$$B_2(s) := T(T(B_2)(s))$$

Indichiamo con $A_1(s) := |B_1(s)|$ e $A_2(s) := |B_2(s)|$ le aree delle bolle. Siccome la descrizione della posizione è continua anche $T(B_1(s)), T(B_2(s))$ variano in maniera continua. Essendo l'inversione un omeomorfismo del piano complesso esteso, anche le bolle $B_1(s), B_2(s)$ variano con continuità e di conseguenza per la costruzione geometrica anche le aree $A_1(s), A_2(s)$. Inoltre osserviamo che le aree variano in maniera strettamente monotona. Infatti se $s_1 < s_2$ la bolla $B_1(s_1)$ si espande ($B_1(s_1) \subsetneq B_1(s_2)$), mentre la bolla $B_2(s_1)$ si contrae ($B_2(s_1) \supsetneq B_2(s_2)$). Poiché per entrambe vale un contenimento stretto anche le aree sono funzioni strettamente monotone $A_2(s) \searrow, A_1(s) \nearrow$.

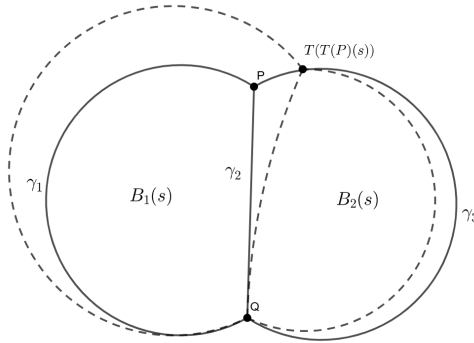


Figura 2.8: Cosa succede quando applichiamo l'inversa T^{-1} cioè T .

Definiamo il rapporto tra le due aree:

$$R : [0, +\infty) \rightarrow (0, 1]$$

$$R(s) := \frac{A_2(s)}{A_1(s)}$$

Poiché $A_2 \searrow$ strettamente decrescente positiva e $A_1 \nearrow$ strettamente crescente positiva anche il rapporto è strettamente decrescente.

Vediamo i comportamenti delle due aree per $s \rightarrow +\infty$, come possiamo

osservare per $A_1(s), A_2(s)$ vale:

$$\begin{aligned}\lim_{s \rightarrow +\infty} A_2(s) &= 0 \\ \lim_{s \rightarrow +\infty} A_1(s) &= +\infty\end{aligned}$$

Quindi il limite di $R(s)$ per $s \rightarrow +\infty$:

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} R(s) = 0$$

Inoltre nella costruzione iniziale le due aree sono uguali, quindi per $s = 0$ vale:

$$R(0) = 1$$

Otteniamo l'esistenza di una doppia bolla standard che racchiude due aree A_1, A_2 qualsiasi, infatti il rapporto $R(s)$ è continuo e strettamente decrescente, e pertanto assume tutti i valori tra $(0, 1]$. A meno di riscaldamento della costruzione iniziale, la famiglia costruita descrive tutte le doppie bolle standard.

Resta da dimostrare l'unicità di una doppia bolla standard con aree A_1, A_2 assegnate.

Adesso prendiamo una doppia bolla standard qualsiasi che racchiude le aree A_1, A_2 . Siano B_1 e B_2 le bolle con raggi rispettivamente r_1 e r_2 . Dal lemma 7 osserviamo che una doppia bolla standard è univocamente determinata quando conosciamo due curvaturei e quindi dai due raggi. Infatti siccome deve essere rispettata la condizione $k_1 + k_2 + k_3 = 0$ allora la curvatura mancante si ricava come la somma degli opposti delle due curvaturei note. Inoltre due bolle standard che hanno le stesse curvaturei sono congruenti, infatti basta traslare e ruotare in maniera opportuna. Analogamente è possibile associare il parametro s alla terna delle curvaturei $s \mapsto (k_1(s), k_2(s), k_3(s))$.

$$\frac{A_2}{A_1} \mapsto s \mapsto (k_1(s), k_2(s), k_3(s))$$

Da costruzione non possono esistere due bolle standard con stesse aree ma con curvaturei diverse e quindi con raggi diversi. Infatti se due configurazioni corrispondessero a parametri $s_1 \neq s_2$:

$$R(s_1) = \frac{A_2(s_1)}{A_1(s_1)} = \frac{A_2(s_2)}{A_1(s_2)} = R(s_2)$$

da R strettamente decrescente segue $s_1 = s_2$. Inoltre raggiunge tutte le possibili terne compatibili perché formano una doppia bolla standard con due aree qualsiasi e perciò è rappresentata dalla costruzione. Quindi la bolla standard che ha raggi r_1, r_2 deve coincidere con quella della costruzione.

Capitolo 3

La doppia bolla standard è l'unico cluster di perimetro minimo

Introduciamo il concetto di grafo planare perché sarà utile più avanti. In generale un grafo si dice planare se può essere raffigurato nel piano in modo che non si abbiano archi che si intersecano. Se un grafo è già raffigurato senza incroci si dice piano, diamo una definizione più formale:

Definizione 3.0.1 (Grafo Piano). *Un grafo piano è una coppia (V, E) di elementi finiti con le seguenti proprietà (gli elementi di V sono chiamati vertici, mentre quelli di E archi):*

- $V \subset \mathbb{R}^2$
- Ogni arco è rappresentato come una curva che collega due vertici
- L'interno di un arco non contiene vertici e punti di un altro arco

Definizione 3.0.2 (Facce). *Sia G un grafo piano. L'insieme $\mathbb{R}^2 \setminus G$ è aperto, le componenti connesse di questo insieme si chiamano facce di G*

Definizione 3.0.3 (Grafo connesso). *Un grafo G non vuoto si dice connesso se per ogni coppia di vertici esiste un cammino (inteso come unione finita di archi in E) che li collega.*

Per i grafi planari vale il seguente teorema:

Teorema 8. *Sia G un grafo planare connesso con V vertici, E archi e F facce, allora:*

$$V - E + F = 2$$

Dimostrazione. Sia V il numero di vertici, E di archi e F di facce. Dimostriamo per induzione su V .

CAPITOLO 3. LA DOPPIA BOLLA STANDARD È L'UNICO CLUSTER DI PERIMETRO MINIMO

Se $V = 1$ allora il grafo planare G è composto da un numero finito di curve chiuse che si intersecano soltanto nell'unico vertice. Se $E = 0$ allora $F = 1$ e la formula è vera. Se aggiungiamo una curva chiusa contenuta in una faccia, essa divide tale faccia. Di conseguenza il numero di archi e di facce aumentano entrambi di 1. Quindi la formula è vera per qualsiasi numero di archi quando $V = 1$.

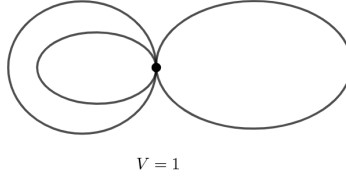


Figura 3.1: Caso base

Supponiamo vero fino a $V - 1$, vogliamo dimostrare la formula per $V > 1$. Siccome G è connesso e $V > 1$ esiste almeno un arco che collega due vertici distinti e quindi non è un ciclo. Adesso contraiamo l'arco e otteniamo un grafo G' con V' vertici, E' archi e F' facce. La contrazione non altera il numero di facce $F' = F$ perché non introduce né elimina componenti connesse del piano, ma riduce il numero di vertici e di archi di 1: $V' = V - 1$, $E' = E - 1$. Applichiamo l'ipotesi induttiva e la formula è verificata:

$$V - E + F = V' + 1 - (E' + 1) + F' = V' - E' + F' = 2$$

□



Figura 3.2: Passo induttivo: l'arco da contrarre è quello marcato

3.1 Una doppia bolla di perimetro minimo ha esterno connesso

Da adesso in poi consideriamo [1] come testo di riferimento.

Proposizione 9. *Se una doppia bolla di perimetro minimo in $\mathbb{R}^2$ ha le bolle e l'esterno connessi allora è una doppia bolla standard*

Dimostrazione. Vogliamo escludere il caso in cui abbiamo le due bolle B_1 e B_2 con le frontiere che non si intersecano $\partial B_1 \cap \partial B_2 = \emptyset$. Se fosse così potremmo traslare (quindi senza alterare il perimetro) le due bolle fino a quando le frontiere sono tangenti, ma così il teorema di regolarità sarebbe violato.

Inoltre la formula di Eulero su vertici V , archi E e facce di grafi planari connessi F è la seguente

$$V - E + F = 2$$

Poiché ogni vertice ha grado tre: $2E = 3V$. Sappiamo $F = 3$ e risolvendo l'equazione si ottiene $V = 2$ e $E = 3$. Dal teorema di regolarità otteniamo che il cluster è formato da 3 archi di circonferenza che si incontrano in due vertici con angoli di 120° $\square$

Adesso dimostriamo che qualunque doppia bolla che contiene componenti connesse dell'esterno o bolle disconnesse non è di perimetro minimo.

Lemma 10. *Una doppia bolla di perimetro minimo che ha esterno connesso deve essere standard*

Dimostrazione. Sia U una doppia bolla di perimetro minimo con esterno connesso. Supponiamo per assurdo che U non sia standard, dalla proposizione 9, deve avere almeno una bolla sconnessa. Quindi vogliamo dimostrare che U non è di perimetro minimo, arrivando così all'assurdo. Si crea un grafo formato da un solo vertice per ogni componente connessa delle bolle, con un arco che collega vertici di componenti adiacenti. Per qualunque U con esterno connesso, nel grafo corrispondente non sono presenti cicli (altrimenti l'esterno sarebbe sconnesso). Quindi ci sarà una componente di una bolla di U che si trova a un'estremità del grafo, questa sarà formata esattamente da due archi di circonferenza e due vertici.

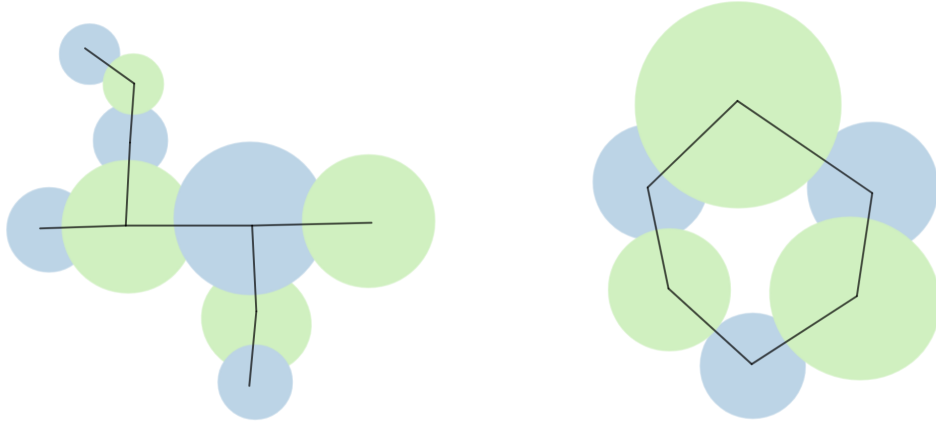


Figura 3.3: Esempio ciclico e non ciclico.

La bolla B_1 indicata in verde, mentre la bolla B_2 in celeste

Sia F la componente di U con queste caratteristiche e siano r, q i due vertici, inoltre sia t un vertice di U che è adiacente ad r ma non è vertice di F ($t \neq r, t \neq q$). Infine sia S l'arco che collega r e t .

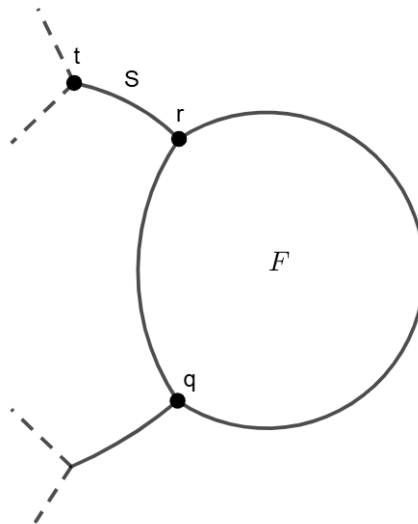


Figura 3.4: Costruzione di quanto detto precedentemente

CAPITOLO 3. LA DOPPIA BOLLA STANDARD È L'UNICO CLUSTER DI PERIMETRO MINIMO

Sia $p = r$ si definisce un nuovo cluster di bolle U_p , creato rimpiazzando la componente F dalla sua riflessione attorno all'asse perpendicolare al segmento $qp(= qr)$. Se il punto p viene lasciato di muoversi in maniera continua lungo l'arco S dal punto r fino al punto t e riflettendo la componente F e l'arco rp lungo l'asse perpendicolare al segmento qp , il cluster di bolle cambia, ma il perimetro e la quantità di area racchiusa rimane costante.

Siccome p varia continuamente da r a t , possono verificarsi due casi:

- (i) Ci sarà un punto p per il quale la riflessione risulterà a contatto con un'altra componente di una bolla e creando così un nuovo vertice con quattro archi

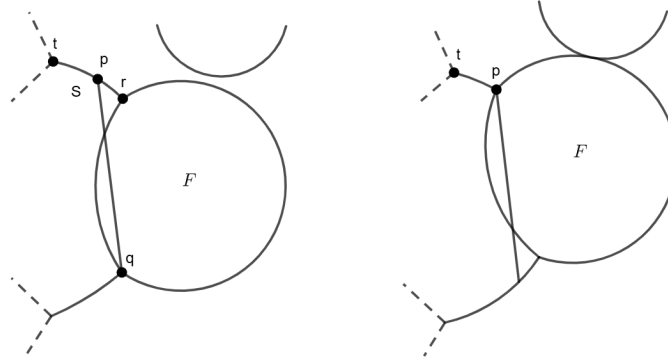


Figura 3.5: Caso (i)

- (ii) Il punto p coincide con il punto t e ci saranno così quattro archi che si incontrano nel vertice.

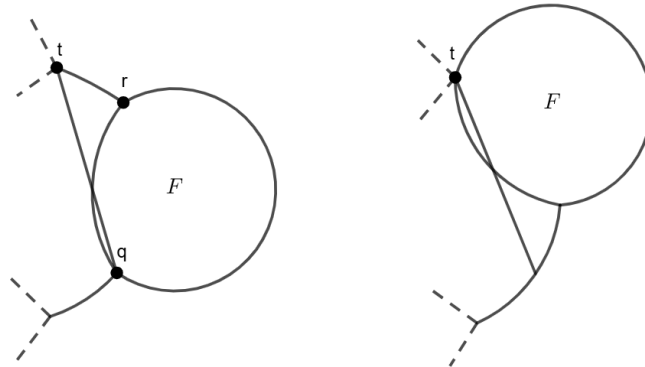


Figura 3.6: Caso (ii)

CAPITOLO 3. LA DOPPIA BOLLA STANDARD È L'UNICO CLUSTER DI PERIMETRO MINIMO

Queste operazioni creano un cluster di bolle con lo stesso perimetro e vengono racchiuse le stesse quantità di area, poiché la riflessione non altera la lunghezza di un arco e l'area di una regione in $\mathbb{R}^2$. Ma entrambi i casi contraddicono il teorema di regolarità, infatti gli archi si dovrebbero incontrare a tre a tre in un nodo. Quindi U non è di perimetro minimo, assurdo. $\square$

Adesso per arrivare all'obiettivo procediamo dimostrando che ogni doppia bolla di perimetro minimo deve avere esterno connesso.

Definizione 3.1.1. *Per due assegnate quantità di area A_1 e A_2 , definiamo $P(A_1, A_2)$ il perimetro della doppia bolla di perimetro minimo che racchiude le aree A_1, A_2 . Definiamo $P_0(A_1, A_2)$ il perimetro della doppia bolla standard che racchiude A_1, A_2 .*

Osservazione 9. *Segue dalla definizione $\forall A_1, A_2 > 0 \Rightarrow P(A_1, A_2) \leq P_0(A_1, A_2)$.*

Definizione 3.1.2 (α -Hölder). *Sia $N \in \mathbb{N}$. Una funzione:*

$$f : X \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$$

si dice α -Hölder se esistono $C > 0$, $0 < \alpha \leq 1 \in \mathbb{R}$ tale che:

$$|f(x) - f(y)| \leq C \|x - y\|^\alpha \quad \forall x, y \in X$$

Osservazione 10. *Una funzione α -Hölder è continua. Infatti sia $x \in X$ e $\epsilon > 0$, per ogni $y \in X$ con $\|x - y\| < \delta$, se definiamo $\delta := (\frac{\epsilon}{C})^{\frac{1}{\alpha}}$:*

$$|f(x) - f(y)| \leq C \|x - y\|^\alpha < C \delta^\alpha = \epsilon$$

Osservazione 11. *Nella definizione si usa $0 < \alpha \leq 1$ perché se X è connesso il caso $\alpha > 1$ sono le funzioni costanti. Infatti sia $x \in X$ consideriamo il limite direzionale lungo una direzione v ($\|v\| = 1$) in $\mathbb{R}^N$:*

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t}$$

Allora:

$$\frac{|f(x + tv) - f(x)|}{|t|} \leq C \frac{|t|^\alpha}{|t|} = C |t|^{\alpha-1}$$

Siccome $\alpha > 1$ allora $\alpha - 1 > 0$, perciò quando $t \rightarrow 0$ la derivata direzionale in v tende a 0.

CAPITOLO 3. LA DOPPIA BOLLA STANDARD È L'UNICO CLUSTER DI PERIMETRO MINIMO

Lemma 11. *Per ogni $A_1, A_2 > 0$ fissate, la funzione $A \mapsto P(A, A_2)$ ha un minimo per $A \in [A_1, +\infty)$.*

Dimostrazione. Dalla disuguaglianza isoperimetrica $P(A, A_2) \geq \text{perim}(D)$ dove D è un disco di area A . Quindi $P(A, A_2) \rightarrow +\infty$ per $A \rightarrow +\infty$. Una volta dimostrato che P è continua, abbiamo la tesi.

Studiamo la funzione $P(A, A_2)$ al variare di A . Supponiamo $A' > A$ tale che $A' - A = c = \pi\rho^2 > 0$. Inoltre chiamiamo B e B_2 le bolle di area rispettivamente A e A_2 della doppia bolla di perimetro minimo. Definiamo $B' := B \cup B_\rho(\tau)$ con τ un punto abbastanza lontano in maniera tale che il cerchio di raggio ρ non intersechi la doppia bolla di perimetro minimo. Per costruzione A' è l'area della bolla B' .

Adesso:

$$\text{Per}(B', B_2) = P(A, A_2) + 2\pi\rho \geq P(A', A_2)$$

Dove l'ultima disuguaglianza segue dal fatto che $P(A', A_2)$ è la doppia bolla di perimetro minimo tra tutte quelle che racchiudono le aree A' e A_2 . Sappiamo $\rho = \sqrt{\frac{A'-A}{\pi}}$, perciò:

$$P(A', A_2) \leq P(A, A_2) + 2\pi\sqrt{\frac{A' - A}{\pi}}$$

Dalla quale segue:

$$P(A', A_2) - P(A, A_2) \leq 2\sqrt{\pi}\sqrt{A' - A}$$

Analogamente si fa per $A' < A$, scambiando il ruolo tra A e A' otteniamo:

$$P(A, A_2) - P(A', A_2) \leq 2\sqrt{\pi}\sqrt{A - A'}$$

da cui segue:

$$|P(A, A_2) - P(A', A_2)| \leq 2\sqrt{\pi}\sqrt{|A - A'|}$$

quindi $P(\cdot, A_2)$ è $\frac{1}{2}$ -Hölder e perciò è continua. $\square$

Lemma 12. *Nella doppia bolla standard, aumentando l'area della bolla più grande (tenendo fissa quella più piccola), il perimetro totale cresce strettamente.*

Dimostrazione. Indichiamo con θ l'angolo tra il segmento che unisce i due nodi P, Q e l'arco che divide le due bolle (Vedere figura 3.7), possiamo calcolare la lunghezza dell'arco in funzione di θ :

$$L(\theta) = \frac{d(P, Q) \cdot \theta}{\sin \theta}$$

CAPITOLO 3. LA DOPPIA BOLLA STANDARD È L'UNICO CLUSTER DI PERIMETRO MINIMO

Il perimetro della doppia bolla standard con θ come angolo è dato da:

$$\text{perim}(\theta) = L(\theta) + L\left(\frac{2\pi}{3} + \theta\right) + L\left(\frac{2\pi}{3} - \theta\right)$$

Calcoliamo la derivata prima e seconda di L :

$$L'(\theta) = d(P, Q) \cdot \frac{\sin \theta - \theta \cos \theta}{\sin^2 \theta}$$

$$L''(\theta) = d(P, Q) \cdot \frac{\theta \sin^2 \theta + 2\theta \cos^2 \theta - \sin(2\theta)}{\sin^3 \theta}$$

Si può mostrare che $L'(\theta) > 0$ e $L''(\theta) > 0$ per $\theta \in (0, \pi)$ e quindi vale che $L(\theta)$ è crescente in $[0, \frac{\pi}{3})$, così come $L(\frac{2\pi}{3} + \theta) + L(\frac{2\pi}{3} - \theta)$ è crescente sempre in $[0, \frac{\pi}{3})$. Questo implica che il perimetro è crescente in $[0, \frac{\pi}{3})$.

Otteniamo che incrementando θ aumentiamo anche il perimetro.

Scriviamo in funzione di θ l'area della regione delimitata dal segmento PQ e l'arco di circonferenza che divide la bolla più grande dalla regione esterna:

$$A(\theta) = d(P, Q)^2 \cdot \frac{\theta - \sin \theta \cos \theta}{4 \sin^2 \theta}$$

Se calcoliamo la derivata seconda:

$$A''(\theta) = d(P, Q)^2 \cdot \frac{2\theta(2 + \cos(2\theta)) - 3 \sin(2\theta)}{4 \sin^4 \theta}$$

Si può mostrare che $A''(\theta) > 0$ in $(0, \pi)$. Adesso scriviamo le aree di B_1 e B_2 :

$$\text{Area}(B_1) = A\left(\frac{2\pi}{3} - \theta\right) + A(\theta)$$

$$\text{Area}(B_2) = A\left(\frac{2\pi}{3} + \theta\right) - A(\theta)$$

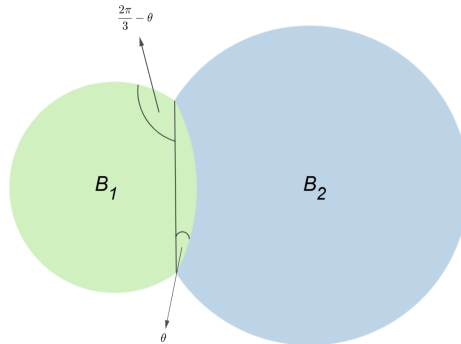


Figura 3.7: Calcolo delle aree di B_1 e B_2 in funzione di θ

CAPITOLO 3. LA DOPPIA BOLLA STANDARD È L'UNICO CLUSTER DI PERIMETRO MINIMO

L'area di B_1 decresce strettamente in $(0, \frac{\pi}{3})$, mentre quella di B_2 cresce strettamente in $(0, \frac{\pi}{3})$. In generale se aumentiamo θ allora incrementiamo l'area della bolla più grande.

Infine se ingrandiamo (moltiplicare per un fattore maggiore di 1), riportando la bolla più alla sua area originale, solo l'area della bolla più grande è aumentata. Nel processo di ingrandire è aumentato anche il perimetro totale. $\square$

Enunciamo e dimostriamo questa importante proposizione :

Proposizione 13. *L'esterno di una doppia bolla di perimetro minimo deve essere connesso*

Dimostrazione. Date due quantità di area A_1 e A_2 , possiamo supporre senza perdita di generalità $A_1 \geq A_2$. Supponiamo per assurdo che l'esterno della doppia bolla di perimetro minimo sia disconnesso. Inoltre chiamiamo B_1 e B_2 le bolle che racchiudono rispettivamente A_1 e A_2 . Dal lemma precedente possiamo scegliere un certo $A'_1 \in [A_1, +\infty)$ in maniera tale che minimizzi $P(A'_1, A_2)$ e in particolare valga $P(A'_1, A_2) \leq P(A_1, A_2)$.

Adesso mostriamo che se B'_1, B_2 sono le bolle della doppia bolla di perimetro minimo che racchiudono rispettivamente le aree A'_1 e A_2 , allora l'esterno della doppia bolla è connesso. Supponiamo per assurdo anche qua che l'esterno sia disconnesso. Incorporiamo le componenti connesse limitate dell'esterno nella bolla B'_1 e poi rimuoviamo gli archi che stavano separando le componenti connesse limitate da B'_1 , otteniamo così una nuova doppia bolla B''_1, B_2 con meno perimetro di B'_1, B_2 . Ma questo è assurdo per la scelta di A'_1 .

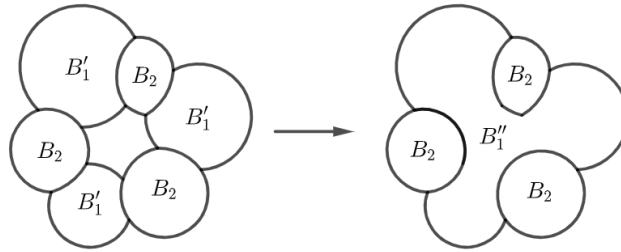


Figura 3.8: Eliminiamo gli archi della bolla B'_1 che erano in comune con una componente connessa limitata dell'esterno

CAPITOLO 3. LA DOPPIA BOLLA STANDARD È L'UNICO CLUSTER DI PERIMETRO MINIMO

A questo punto se fosse $B_1 = B'_1$ allora avremmo anche $A_1 = A'_1$, ma questo non è possibile perché ripetendo il ragionamento A'_1 non sarebbe minimo.

Necessariamente $B'_1 \neq B_1$ e quindi $A_1 < A'_1$.

Inoltre prendendo una doppia bolla standard di area A_1, A_2 allora questa ha perimetro minore della doppia bolla standard corrispondente alle aree A'_1, A_2 con $A_1 < A'_1$ (lemma 12). Quindi $P_0(A_1, A_2) < P_0(A'_1, A_2)$, mentre dal lemma 10 $P_0(A'_1, A_2) = P(A'_1, A_2)$. Quindi aggiungendo che $P(A_1, A_2) \leq P_0(A_1, A_2)$ otteniamo:

$$P(A_1, A_2) \leq P_0(A_1, A_2) < P_0(A'_1, A_2) = P(A'_1, A_2) \leq P(A_1, A_2)$$

Questo è assurdo per cui l'esterno di B_1, B_2 è connesso. $\square$

3.2 Teorema principale sulla doppia bolla standard

Adesso possiamo presentare il risultato principale:

Teorema 14 (Teorema principale). *Fissate le due aree $A_1 > 0$ e $A_2 > 0$, la doppia bolla standard è l'unica doppia bolla di perimetro minimo che racchiude A_1, A_2 .*

Dimostrazione. L'esistenza per ogni A_1, A_2 è stata dimostrata.

Per la proposizione 13 l'esterno deve essere connesso.

Per il lemma 10 la doppia bolla deve essere standard. Quindi solo una doppia bolla standard può essere di perimetro minimo.

L'unicità è garantita dalla sezione finale del capitolo 2. $\square$

Corollario 3. *Se incrementiamo una delle due quantità delle aree A_1, A_2 incrementiamo anche il perimetro della doppia bolla di perimetro minimo.*

CAPITOLO 3. LA DOPPIA BOLLA STANDARD È L'UNICO CLUSTER DI PERIMETRO MINIMO

Capitolo 4

Bibliografia

- [1] Joel Foisy, Manuel Alfaro, Jeffrey Brock, Nickalous Hodges, and Jason Zimba: The standard double soap bubble in $\mathbb{R}^2$ uniquely minimizes perimeter, *Pacific J. Math.* 159 (1993), 47-59
- [2] F. J. Almgren, Jr. : Existence and regularity almost everywhere of solutions to elliptic variational problems with constraints, *Mem. Amer. Math. Soc.*, 35 (1976)
- [3] Frank Morgan: Soap bubbles in R^2 and in surfaces, preprint (1992).
- [4] I. Chavel: *Isoperimetric Inequalities*, Cambridge University Press, 2001
- [5] E. Paolini, V. M. Tortorelli: The quadruple planar bubble enclosing equal areas is symmetric *Calc. Var.* Vol. 59, N. 1 2020
- [6] W. Wichiramala: Proof of the planar triple bubble conjecture, *J. reine angew. Math.*, 1-44 (2004).
- [7] G. R. Lawlor: Perimeter-minimizing triple bubbles in the plane and the 2-sphere, *Analysis and Geometry in Metric Spaces*, 7(1), 45-61 (2019).
- [8] E. Paolini, A. Tamagnini: Minimal clusters of four planar regions with the same area, *ESAIM: COCV*, 24(3), 1303-1331 (2018).
- [9] E. Paolini, A. Tamagnini: Minimal cluster computation for four planar regions with the same area, *Geometric Flows*, 3(1), 90–96 (2018).
- [10] T. C. Hales: The honeycomb conjecture, *Discrete and Computational Geometry*, 25(1), 1-22 (1999).
- [11] A. Kaewkhao , W. Wichiramala: Shortest Enclosures for four Regions of Given Areas, 1-20, (2007)
- [12] A. Tamagnini: Planar Clusters, Ph.D.Thesis, Università degli Studi di Firenze (2015)
- [13] Richard A. Silverman: *Introductory Complex Analysis*, Dover Publications, 55-64, 1972

- [14] Reinhard Diestel: Graph Theory. Springer, Electronic Edition, 67-76, 2000
- [15] Douglas B. West: Introduction to Graph Theory Second Edition , Pearson Education, Inc., 241-245, 2001
- [16] A. Montesinos Amilibia: Existence and uniqueness of standard bubble clusters of given volumes in $\mathbb{R}^N$, Asian J.Math 5(1), 25-31, (2001).
- [17] Lawrence C. Evans: Partial Differential Equations, Graduate studies in Mathematics, Vol. 19, American Mathematical Society, 241-242