La dimensione in geometria

Emanuele Paolini

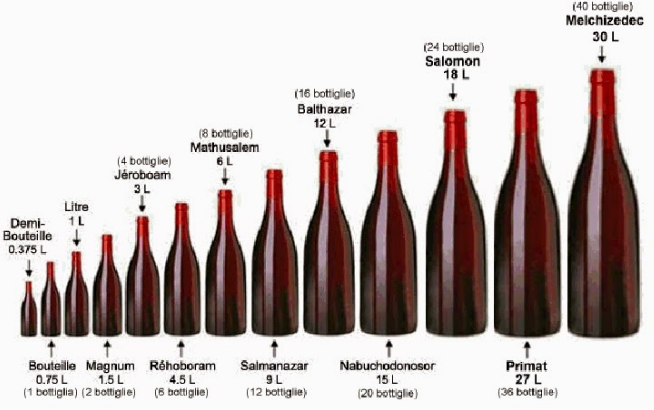
Università di Firenze $\to$ Pisa

Piombino, 18 novembre 2016

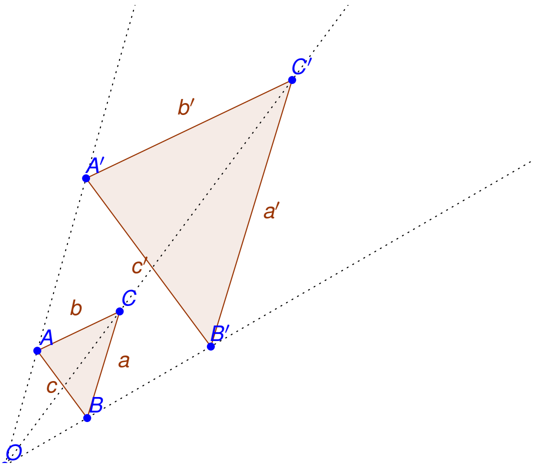
Problemi di scala

Problema

Una normale bottiglia di vino ha una capacità di $3/4$ *di litro. Una bottiglia di tipo* *<u>Jéroboam</u>* *contiene invece* 3 *litri. Quanto è il rapporto tra le altezze delle due bottiglie?*



Similitudine / riscalamento



$$a' = qa, \qquad b' = qb, \qquad c' = qc$$

Riscalamento di un cilindro

Problema

Le "tuberine" vengono normalmente confezionate in un cilindro di altezza 18cm e diametro 9cm. Una confezione contiene 50g di patatine. Se le patatine venissero confezionate in un cilindro di dimensioni doppie, quanti grammi di patatine ci aspetteremmo di trovare?

$$v = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 h = \frac{\pi}{4} d^2 h.$$

$$\frac{V}{v} = \frac{\frac{\pi}{4} D^2 H}{\frac{\pi}{4} d^2 h} = \frac{\frac{\pi}{4} (qd)^2 (qh)}{\frac{\pi}{4} d^2 h} = q^3 = 8$$

Peso delle patatine nel cilindro grande: $8 \cdot 50g = 400g$.

Riscalamento di un cilindro

Problema

Le "tuberine" vengono normalmente confezionate in un cilindro di altezza 18cm e diametro 9cm. Una confezione contiene 50g di patatine. Se le patatine venissero confezionate in un cilindro di dimensioni doppie, quanti grammi di patatine ci aspetteremmo di trovare?

$$v = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 h = \frac{\pi}{4} d^2 h.$$

$$\frac{V}{v} = \frac{\frac{\pi}{4} D^2 H}{\frac{\pi}{4} d^2 h} = \frac{\frac{\pi}{4} (qd)^2 (qh)}{\frac{\pi}{4} d^2 h} = q^3 = 8$$

Peso delle patatine nel cilindro grande: $8 \cdot 50g = 400g$.

Riscalamento di un cilindro

Problema

Le "tuberine" vengono normalmente confezionate in un cilindro di altezza 18cm e diametro 9cm. Una confezione contiene 50g di patatine. Se le patatine venissero confezionate in un cilindro di dimensioni doppie, quanti grammi di patatine ci aspetteremmo di trovare?

$$v = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 h = \frac{\pi}{4} d^2 h.$$

$$\frac{V}{v} = \frac{\frac{\pi}{4} D^2 H}{\frac{\pi}{4} d^2 h} = \frac{\frac{\pi}{4} (qd)^2 (qh)}{\frac{\pi}{4} d^2 h} = q^3 = 8$$

Peso delle patatine nel cilindro grande: $8 \cdot 50g = 400g$.

Riscalamento di un cilindro

Problema

Le "tuberine" vengono normalmente confezionate in un cilindro di altezza 18cm e diametro 9cm. Una confezione contiene 50g di patatine. Se le patatine venissero confezionate in un cilindro di dimensioni doppie, quanti grammi di patatine ci aspetteremmo di trovare?

$$v = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 h = \frac{\pi}{4} d^2 h.$$

$$\frac{V}{v} = \frac{\frac{\pi}{4} D^2 H}{\frac{\pi}{4} d^2 h} = \frac{\frac{\pi}{4} (qd)^2 (qh)}{\frac{\pi}{4} d^2 h} = q^3 = 8$$

Peso delle patatine nel cilindro grande: $8 \cdot 50g = 400g$.

Riscalamento di altri solidi geometrici

- cubo: $v = \ell^3$

$$\frac{V}{v} = \frac{(q\ell)^3}{\ell^3} = \frac{q^3\ell^3}{\ell^3} = q^3,$$

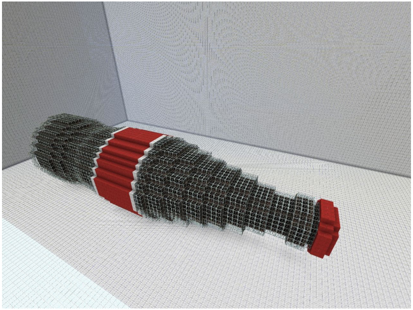
- parallelepipedo: $v = abc$

$$\frac{V}{v} = \frac{(qa)(qb)(qc)}{abc} = q^3,$$

- sfera $v = \frac{4}{3}\pi r^3$

$$\frac{V}{v} = \frac{\frac{4}{3}(qr)^3}{\frac{4}{3}r^3} = q^3.$$

Definizione di volume



$$v(B) = N\ell^3$$

$$v(qB) = N(q\ell)^3 = Nq^3\ell^3 = q^3 v(B)$$

Dimensione di una misura

$$m(qF) = q^d m(F).$$

- lunghezza: $d = 1$
- area: $d = 2$
- volume: $d = 3$

Bottiglia

Problema

Una normale bottiglia di vino ha una capacità di $3/4$ *di litro. Una bottiglia di tipo* *Jéroboam* *contiene invece* 3 *litri. Quanto è il rapporto tra le altezze delle due bottiglie?*

$$J = qB \quad \Rightarrow \quad 3\ell = v(J) = q^3 \cdot v(B) = q^3 \cdot \frac{3}{4}\ell \quad \Rightarrow \quad q = \sqrt[3]{4}.$$

$$\frac{H}{h} = \frac{qh}{h} = q = \sqrt[3]{4} \approx 1,59$$

Bottiglia

Problema

Una normale bottiglia di vino ha una capacità di $3/4$ *di litro. Una bottiglia di tipo* <u>*Jéroboam*</u> *contiene invece* 3 *litri. Quanto è il rapporto tra le altezze delle due bottiglie?*

$$J = qB \quad \Rightarrow \quad 3\ell = v(J) = q^3 \cdot v(B) = q^3 \cdot \frac{3}{4}\ell \quad \Rightarrow \quad q = \sqrt[3]{4}.$$

$$\frac{H}{h} = \frac{qh}{h} = q = \sqrt[3]{4} \approx 1,59$$

Bottiglia

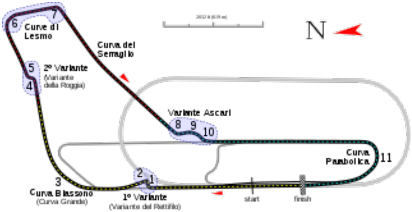
Problema

Una normale bottiglia di vino ha una capacità di $3/4$ *di litro. Una bottiglia di tipo* <u>*Jéroboam*</u> *contiene invece* 3 *litri. Quanto è il rapporto tra le altezze delle due bottiglie?*

$$J = qB \quad \Rightarrow \quad 3\ell = v(J) = q^3 \cdot v(B) = q^3 \cdot \frac{3}{4}\ell \quad \Rightarrow \quad q = \sqrt[3]{4}.$$

$$\frac{H}{h} = \frac{qh}{h} = q = \sqrt[3]{4} \approx 1,59$$

Esercizi

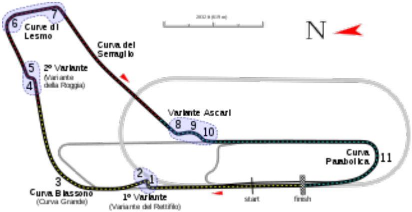


Problema

Daniele ha disegnato il circuito di Monza in scala 1:1000 sul pavimento della terrazza. Sapendo che il circuito reale è lungo 5793 m, quanto sarà lungo il circuito disegnato da Daniele?

$$\frac{1}{1000} \cdot 5793m = 5,793m$$

Esercizi

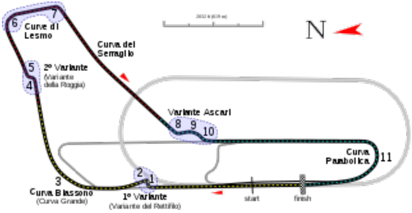


Problema

Daniele ha disegnato il circuito di Monza in scala 1:1000 sul pavimento della terrazza. Sapendo che il circuito reale è lungo 5793 m, quanto sarà lungo il circuito disegnato da Daniele?

$$\frac{1}{1000} \cdot 5793m = 5,793m$$

Esercizi

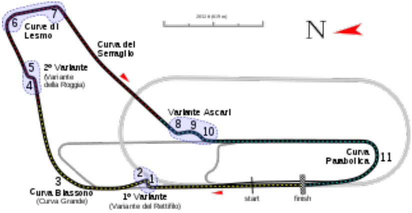


Problema

Daniele ha disegnato il circuito di Monza in scala 1:1000 sul pavimento della terrazza. Contando le piastrelle Daniele ha determinato che l'area racchiusa dal circuito in scala è circa $1,2\,m^2$*. Quanti metri quadri racchiude il vero circuito?*

$$1000^2 \cdot 1,2\,m^2 = 1.200.000\,m^2$$

Esercizi

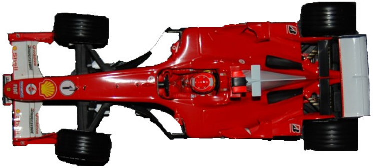


Problema

Daniele ha disegnato il circuito di Monza in scala 1:1000 sul pavimento della terrazza. Contando le piastrelle Daniele ha determinato che l'area racchiusa dal circuito in scala è circa $1,2\, m^2$. *Quanti metri quadri racchiude il vero circuito?*

$$1000^2 \cdot 1,2\, m^2 = 1.200.000\, m^2$$

Esercizi



Problema

Le macchinine che Daniele usa per giocare sono invece in scala $1:50$. *Se per dipingere la macchinina Daniele utilizza 1 tubetto di vernice rossa, quanti tubetti gli sarebbero necessari per dipingere la macchina vera?*

$$50^2 \cdot 1 = 2500.$$

Omino di cera

Problema

Usando un litro di cera modello un omino che raffigura me stesso. Quanto verrà alto l'omino?

$$V = 80\ell = 80v = v/q^3 \quad \Rightarrow \quad q = \frac{1}{\sqrt[3]{80}}$$

$$h = q \cdot H = \frac{1.90\,m}{\sqrt[3]{80}} \approx 0,44\,m$$

Omino di cera

Problema

Usando un litro di cera modello un omino che raffigura me stesso. Quanto verrà alto l'omino?

$$V = 80\ell = 80v = v/q^3 \quad \Rightarrow \quad q = \frac{1}{\sqrt[3]{80}}$$

$$h = q \cdot H = \frac{1.90\, m}{\sqrt[3]{80}} \approx 0,44\, m$$

Omino di cera

Problema

Usando un litro di cera modello un omino che raffigura me stesso. Quanto verrà alto l'omino?

$$V = 80\ell = 80v = v/q^3 \quad \Rightarrow \quad q = \frac{1}{\sqrt[3]{80}}$$

$$h = q \cdot H = \frac{1.90\, m}{\sqrt[3]{80}} \approx 0,44\, m$$

Formato ISO 216

Problema

Qual è il rapporto tra le lunghezze dei due lati di un foglio A4?
Sapendo che il formato A0 ha un'area di 1 metro quadro, calcolare le lunghezze dei due lati di un foglio di formato A4.

$$q^2 a = 2a, \qquad q = \sqrt{2}.$$

$$1\,m^2 = 2^4 \cdot a = 2^4 \cdot x \cdot \sqrt{2}x = 16 \cdot \sqrt{2} \cdot x^2$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{16\sqrt{2}}}m = \frac{1}{4\sqrt[4]{2}}m$$

$$x = 0,2102\,m = 21,02\,cm \qquad \sqrt{2} \cdot x = 29,73\,cm.$$

Formato ISO 216

Problema

Qual è il rapporto tra le lunghezze dei due lati di un foglio A4? Sapendo che il formato A0 ha un'area di 1 metro quadro, calcolare le lunghezze dei due lati di un foglio di formato A4.

$$q^2 a = 2a, \qquad q = \sqrt{2}.$$

$$1 m^2 = 2^4 \cdot a = 2^4 \cdot x \cdot \sqrt{2} x = 16 \cdot \sqrt{2} \cdot x^2$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{16\sqrt{2}}} m = \frac{1}{4\sqrt[4]{2}} m$$

$$x = 0,2102\, m = 21,02\, cm \qquad \sqrt{2} \cdot x = 29,73\, cm.$$

Formato ISO 216

Problema

Qual è il rapporto tra le lunghezze dei due lati di un foglio A4? Sapendo che il formato A0 ha un'area di 1 metro quadro, calcolare le lunghezze dei due lati di un foglio di formato A4.

$$q^2 a = 2a, \qquad q = \sqrt{2}.$$

$$1m^2 = 2^4 \cdot a = 2^4 \cdot x \cdot \sqrt{2}x = 16 \cdot \sqrt{2} \cdot x^2$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{16\sqrt{2}}} m = \frac{1}{4\sqrt[4]{2}} m$$

$$x = 0,2102\, m = 21,02\, cm \qquad \sqrt{2} \cdot x = 29,73\, cm.$$

Formato ISO 216

Problema

Qual è il rapporto tra le lunghezze dei due lati di un foglio A4? Sapendo che il formato A0 ha un'area di 1 metro quadro, calcolare le lunghezze dei due lati di un foglio di formato A4.

$$q^2 a = 2a, \qquad q = \sqrt{2}.$$

$$1m^2 = 2^4 \cdot a = 2^4 \cdot x \cdot \sqrt{2}x = 16 \cdot \sqrt{2} \cdot x^2$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{16\sqrt{2}}} m = \frac{1}{4\sqrt[4]{2}} m$$

$$x = 0,2102\, m = 21,02\, cm \qquad \sqrt{2} \cdot x = 29,73\, cm.$$

Formato ISO 216

Problema

Qual è il rapporto tra le lunghezze dei due lati di un foglio A4? Sapendo che il formato A0 ha un'area di 1 metro quadro, calcolare le lunghezze dei due lati di un foglio di formato A4.

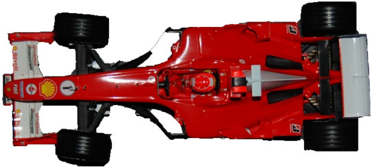
$$q^2 a = 2a, \qquad q = \sqrt{2}.$$

$$1\,m^2 = 2^4 \cdot a = 2^4 \cdot x \cdot \sqrt{2}x = 16 \cdot \sqrt{2} \cdot x^2$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{16\sqrt{2}}} m = \frac{1}{4\sqrt[4]{2}} m$$

$$x = 0,2102\,m = 21,02\,cm \qquad \sqrt{2} \cdot x = 29,73\,cm.$$

misura 0-dimensionale

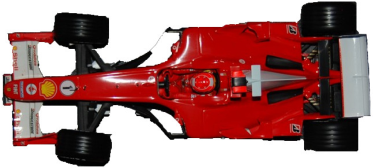


Problema

La macchinina di formula uno di Daniele è in scala 1 : 50. *Sapendo che la macchinina vera ha quattro ruote, quante ruote ha la macchinina in scala?*

$$m(qX) = q^0 m(X) = m(X)$$

misura 0-dimensionale

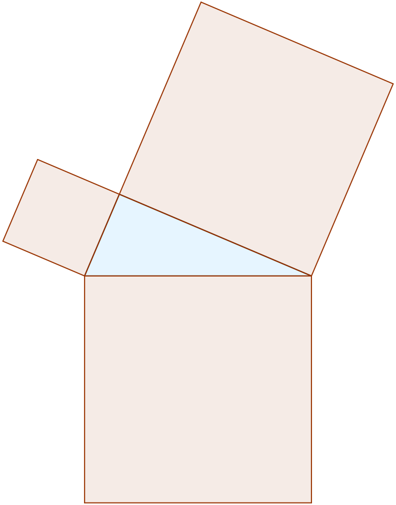


Problema

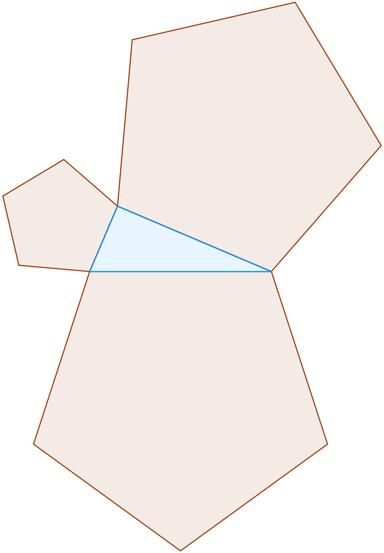
La macchinina di formula uno di Daniele è in scala $1:50$*. Sapendo che la macchinina vera ha quattro ruote, quante ruote ha la macchinina in scala?*

$$m(qX) = q^0 m(X) = m(X)$$

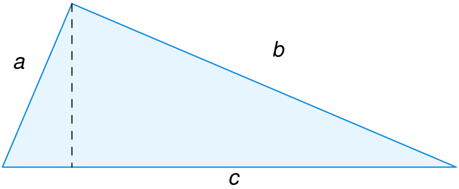
Il teorema di Pitagora



Il teorema di Pitagora



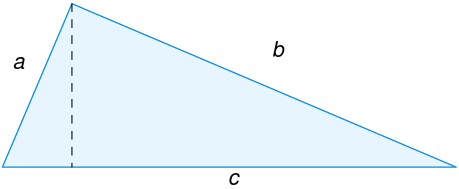
Teorema di Pitagora



$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 \mathcal{A} + \left(\frac{b}{c}\right)^2 \mathcal{A} = \mathcal{A}$$

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

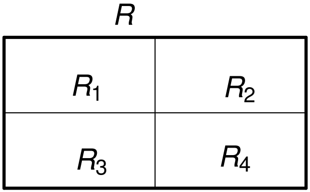
Teorema di Pitagora



$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 \mathcal{A} + \left(\frac{b}{c}\right)^2 \mathcal{A} = \mathcal{A}$$

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

figure autosimilari



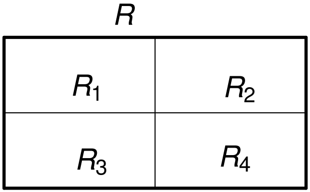
$$m(R) = m(R_1)+m(R_2)+m(R_3)+m(R_4) = 4m(R/2) = \frac{4}{2^d}m(R).$$

$$1 = \frac{4}{2^d}, \qquad d = 2$$

C=cubo

$$m(C) = 8m(C/2) = \frac{8}{2^d}m(C)$$

figure autosimilari



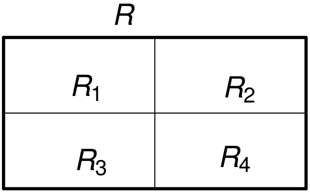
$$m(R) = m(R_1)+m(R_2)+m(R_3)+m(R_4) = 4m(R/2) = \frac{4}{2^d}m(R).$$

$$1 = \frac{4}{2^d}, \qquad d = 2$$

C=cubo

$$m(C) = 8m(C/2) = \frac{8}{2^d}m(C)$$

figure autosimilari



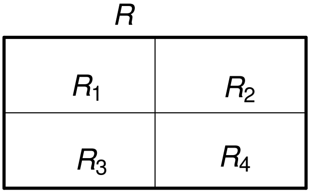
$$m(R) = m(R_1)+m(R_2)+m(R_3)+m(R_4) = 4m(R/2) = \frac{4}{2^d}m(R).$$

$$1 = \frac{4}{2^d}, \qquad d = 2$$

C=cubo

$$m(C) = 8m(C/2) = \frac{8}{2^d}m(C)$$

figure autosimilari



$$m(R) = m(R_1) + m(R_2) + m(R_3) + m(R_4) = 4m(R/2) = \frac{4}{2^d} m(R).$$

$$1 = \frac{4}{2^d}, \qquad d = 2$$

C=cubo

$$m(C) = 8m(C/2) = \frac{8}{2^d} m(C)$$

La cuva di Koch

$$m(K) = 4m(K/3) = \frac{4}{3^d} m(K)$$

$$1 = \frac{4}{3^d}, \qquad d = \log_3 4 \approx 1,26.$$

La cuva di Koch

$$m(K) = 4m(K/3) = \frac{4}{3^d} m(K)$$

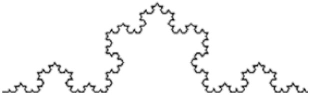
$$1 = \frac{4}{3^d}, \qquad d = \log_3 4 \approx 1,26.$$

La cuva di Koch

$$m(K) = 4m(K/3) = \frac{4}{3^d} m(K)$$

$$1 = \frac{4}{3^d}, \qquad d = \log_3 4 \approx 1,26.$$

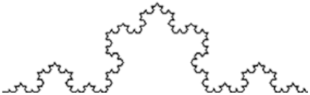
La cuva di Koch



$$m(K) = 4m(K/3) = \frac{4}{3^d} m(K)$$

$$1 = \frac{4}{3^d}, \qquad d = \log_3 4 \approx 1,26.$$

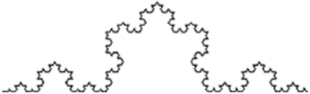
La cuva di Koch



$$m(K) = 4m(K/3) = \frac{4}{3^d} m(K)$$

$$1 = \frac{4}{3^d}, \qquad d = \log_3 4 \approx 1,26.$$

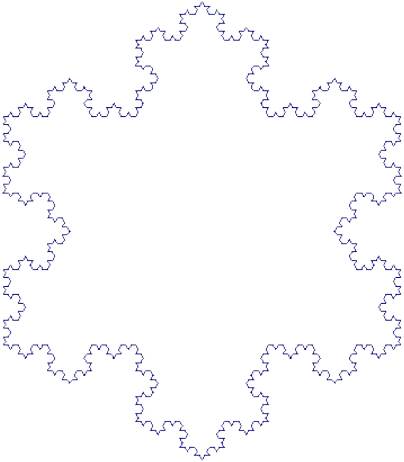
La cuva di Koch



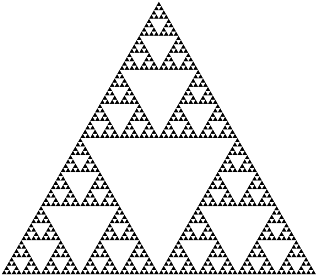
$$m(K) = 4m(K/3) = \frac{4}{3^d} m(K)$$

$$1 = \frac{4}{3^d}, \qquad d = \log_3 4 \approx 1,26.$$

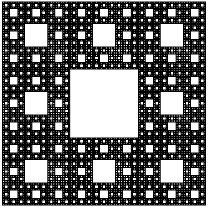
Fiocco di neve di Koch



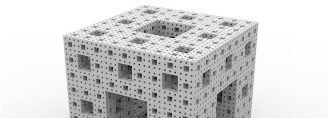
Frattali autosimilari

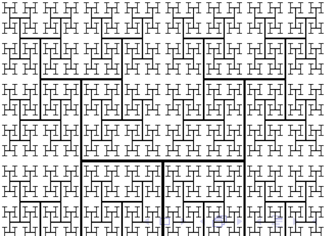


(a) triangolo di Sierpinski $d = \log_2 3$



(b) tappeto di Sierpinski $d = \log_3 8$





Frattali in natura