Analisi Matematica Due
Prova scritta preliminare n. 2

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2001-2002

17 dicembre 2001

1. Determinare i punti critici della funzione

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 2y \sin x$$

e dire se sono massimi o minimi relativi.

2. Si considerino le due successioni di funzioni

$$f_k(x) = \frac{1}{1 + x^{2k}}, \quad g_k(x) = \frac{1 - x^2}{1 + x^{2k}}.$$

Si verifichi che

(a) la successione f_k converge puntualmente ma non uniformemente su $\mathbf{R}$;

(b) la successione g_k converge puntualmente e uniformemente su $\mathbf{R}$.

3. Si consideri la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x^{2k+1}}{2k+1} - \frac{x^{2k+2}}{2k+2} \right).$$

(a) Provare che la serie converge totalmente nell'intervallo $[0, 1]$.

(b) Provare che la serie converge puntualmente nell'intervallo $]-1, 1]$.

(c) (Facoltativo) Trovare esplicitamente la somma della serie.