Analisi Matematica I modulo
Prova scritta preliminare n. 2

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2004-2005

22 dicembre 2004

A*A*A*A*

1. Calcolare il seguente limite

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+n}{1-n+2n^2}\right)^{n^2}.$$

2. Dire se la funzione

$$f(x)=|x\sin x-e^x x^5|$$

è continua e se è derivabile nel punto $x=0$.

3. Determinare il numero di soluzioni dell'equazione

$$x^6=x^5+\alpha$$

al variare del parametro $\alpha\in\mathbb{R}$.

4. (a) Dimostrare che per ogni $x\in(1,2)$ si ha

$$\log x+1-\frac{1}{2\sqrt{x}}>0.$$

(b) Posto $f(x)=x\log x-\sqrt{x}$ dimostrare che

$$f\left(\frac{2005}{2004}\right)<f\left(\frac{2004}{2003}\right).$$

B*B*B*B*

1. Calcolare il seguente limite

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+n}{1-n+n^2}\right)^{n^2}.$$

2. Dire se la funzione

$$f(x)=|x^2e^x-x\sin^2 x|$$

è continua e se è derivabile nel punto $x=0$.

3. Determinare il numero di soluzioni dell'equazione

$$x^7=x^6+\alpha$$

al variare del parametro $\alpha\in\mathbb{R}$.

4. (a) Dimostrare che per ogni $x\in(0,1)$ si ha

$$1-\log x-\frac{\sqrt{x}}{2}>0.$$

(b) Posto $f(x)=\frac{\log x}{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$ dimostrare che

$$f\left(\frac{2004}{2005}\right)>f\left(\frac{2003}{2004}\right).$$

C*C*C*C*

1. Calcolare il seguente limite

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+n}{1-n+n^2} \right)^n .$$

2. Dire se la funzione

$$f(x) = |x^2 \cos x - x \sin^2 x|$$

è continua e se è derivabile nel punto $x = 0$.

3. Determinare il numero di soluzioni dell'equazione

$$x^5 = x^6 + \alpha$$

al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.

4. (a) Dimostrare che per ogni $x \in (1, 2)$ si ha

$$\log x + 1 - \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0$$

(b) Posto $f(x) = x \log x - \sqrt{x}$ dimostrare che

$$f\left(\frac{2005}{2004}\right) < f\left(\frac{2004}{2003}\right).$$

D*D*D*D*

1. Calcolare il seguente limite

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+n}{1-n+n^2}\right)^{2n^2-n}.$$

2. Dire se la funzione

$$f(x)=|x\sin^3 x-x^3\cos x|$$

è continua e se è derivabile nel punto $x=0$.

3. Determinare il numero di soluzioni dell'equazione

$$x^6=x^7+\alpha$$

al variare del parametro $\alpha\in\mathbb{R}$.

4. (a) Dimostrare che per ogni $x\in(0,1)$ si ha

$$1-\log x-\frac{\sqrt{x}}{2}>0.$$

(b) Posto $f(x)=\frac{\log x}{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$ dimostrare che

$$f\left(\frac{2004}{2005}\right)>f\left(\frac{2003}{2004}\right).$$