Analisi Matematica 2
Prova scritta preliminare n. 3

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2009-2010

10 maggio 2010

1. Studiare la soluzione massimale del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \log(x + y^2), \\ y(1) = 0. \end{cases}$$

   In particolare dimostrare che:

   (a) la soluzione è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$;

   (b) $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{y(x)}{\sqrt{-x}} = 1$;

   (c) $y(x)$ è convessa per $x > 1$.

2. Calcolare

$$\int_\gamma (7x^6 - 3y^2)\, dx - 6xy\, dy$$

   sulla curva

$$\gamma(t) = (\cos(3t), \sin^2 t), \qquad t \in [0, \pi/2].$$

3. Calcolare

$$\int_\gamma \frac{(x - y)\, dx + (x + y)\, dy}{x^2 + y^2}$$

   sulla curva

$$\gamma(t) = ((2 + \cos t)\cos(2t), (2 + \cos t)\sin(2t)), \qquad t \in [0, 2\pi].$$

4. Si consideri l'insieme D di $\mathbb{R}^2$

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \le x \le 1,\ 2x \le y + x^2 \le 1 + x^2\right\}.$$

   (a) Verificare che $D \neq \emptyset$;

   (b) Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_D \frac{4}{(y + 3)^2}\, dx\, dy.$$