Analisi Matematica Uno
Prova scritta n. 2

Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2012-2013

18 giugno 2013

1. Si consideri la successione definita per ricorrenza
$$\begin{cases} a_{n+1} = 4a_n^3 - 3a_n^2, \\ a_1 = \alpha. \end{cases}$$
   (a) Determinare il limite quando $\alpha = 2$;
   (b) determinare il limite quando $\alpha = -\frac{1}{5}$;
   (c) determinare il limite quando $\alpha = \frac{1}{4}$;
   (d) (facoltativo) determinare il limite quando $\alpha = \frac{8}{9}$.

2. Si consideri la funzione
$$f(x) = 4x^3 - 18x^2 + 24x.$$
   (a) al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, determinare il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = \alpha$;
   (b) determinare, se esistono, valori dei numeri reali m, q per i quali l'equazione $f(x) = mx + q$ non ha soluzioni;
   (c) dimostrare che la funzione $f\colon [0,1] \to [0,10]$ è invertibile. Chiamata $g\colon [0,10] \to [0,1]$ la funzione inversa, determinare i punti in cui g è derivabile e risolvere l'equazione $g'(f(x)) = \frac{1}{9}$ nella variabile x.

3. Determinare l'insieme di definizione, l'insieme di derivabilità, gli intervalli di monotonia e di convessità della funzione integrale
$$F(x) = \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} (1+t)\, e^{t^2}\, dt\,.$$

4. Stabilire se la seguente serie converge e se converge assolutamente
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\sqrt[n]{2} - 1 \right).$$