Analisi Matematica Uno
Prova scritta n. 3

Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2012-2013

16 luglio 2013

1. Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin\sin x}{x^5} - \frac{\sin^2 x}{x^6}.$$

2. Disegnare il grafico della funzione

$$f(x) = \sqrt[3]{x}\log(x^2).$$

   Trovare un intervallo $I \subset [0,1]$ tale che

$$f\left(\frac{x+1}{2}\right) > \frac{f(x)}{2}$$

   per ogni $x \in I$.

3. Calcolare l'integrale definito

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg}\frac{1}{x}\, dx\ .$$

4. Stabilire per quali valori del parametro reale x risulta convergente la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-2^x)^k$$

   e calcolarne la somma. Inoltre, per i valori di x per cui la serie precedente risulta convegnente, stabilire se è convergente, divergente o indeterminata l'ulteriore serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sin\ (-2^x)^k\ .$$