Analisi Matematica Uno
Prova scritta n. 5

Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2012-2013

13 gennaio 2014

1. Al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ calcolare
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x\cos x + \alpha x^3}{x^5}.$$

2. Studiare la seguente funzione e disegnarne il grafico
$$f(x) = x\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right).$$

3. Calcolare
$$\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin\sqrt{x}\, dx.$$

4. Si consideri la serie
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{1+3^n}.$$
   (a) Dimostrare che la serie converge;
   (b) dimostrare che la somma della serie è minore di 3;
   (c) dimostrare che la somma della serie è maggiore di $2,2$.