Analisi Matematica II – CdL Fisica e Astrofisica
Prima prova scritta parziale - 10 Novembre 2014

Esercizio 1. Disegnare l'insieme

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \leq x \leq 4 - y^2\}.$$

Determinare il massimo e il minimo assunti dalla funzione

$$f(x, y) = x^2 y + y^2 + x$$

sull'insieme D. Determinare la natura dei punti critici contenuti nell'interno di D.

Esercizio 2. Calcolare

$$\int_D f(x, y)\, dx\, dy$$

dove

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \leq x \leq 4 - y^2\},$$
$$f(x, y) = x^2 y + y^2 + x.$$

Esercizio 3. Si consideri la curva $\gamma \colon [0, 6] \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$\gamma(t) = \begin{cases} (t, 0) & \text{se } t \leq 1 \\ (1, t-1) & \text{se } 1 < t \leq 2 \\ (t-1, 1) & \text{se } 2 < t \leq 3 \\ (2, t-2) & \text{se } 3 < t \leq 4 \\ (6-t, 2) & \text{se } t > 4. \end{cases}$$

E' una curva continua? E' una curva chiusa? Calcolare l'integrale

$$\int_\gamma y\, dx - x\, dy.$$

Esercizio 4. Dato il campo vettoriale $\xi(x, y, z) = (-x, 0, z - 3y^2)$ in $\mathbb{R}^3$, calcolarne la divergenza. Calcolare inoltre

$$\int_S (\xi, \nu_S)\, d\sigma$$

dove $S = \{(x, y, z) \colon x^2 + y^2 \leq 1,\ z = (1 - x^2 - y^2) \sin^2 x\}$ è una superficie orientata con versore normale ν_S che ha componente z positiva (cioé rivolto verso l'alto).