"Matematica III 00/01" + "Matematica 99/00" – Scritto del 09/07/01

Esercizio 1. Dati $t_0, x_0 \in \mathbb{R}$ con $t_0 \neq x_0$ si consideri la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = \frac{x^2-1}{x-t} \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

definita sull'intervallo massimo possibile.

(A) [3 punti] Si dimostri che se $x_0 > 1$ e $x_0 > t_0$ allora la soluzione è inferiormente limitata e superiormente illimitata.

(B) [2 punti] Si dimostri che se $x_0 < -1$ e $x_0 < t_0$ allora la soluzione è inferiormente illimitata e superiormente limitata.

(C) [3 punti] Si dimostri che se $t_0 = 1$ e $-1 < x_0 < 1$ allora la soluzione è definita su $(-1, +\infty)$. Si calcolino i limiti di x per $t \to -1^+$ e per $t \to +\infty$.

(D) [3 punti] Si dimostri che se $t_0 > x_0 > 1$ allora la soluzione è limitata e definita su un intervallo $(t_1, +\infty)$ con $t_1 > 1$. Si calcoli $\lim_{t \to +\infty} x(t)$.

(E) [2 punti] Si trovino tutte le soluzioni dell'equazione differenziale $y' = y + 1$.

(F) [3 punti] Si dimostri che se $t_0 = 0$ e $(2/e) - 1 < x_0 < 0$ allora la soluzione x del problema iniziale è definita su un intervallo $(-1, t_1)$ con $t_1 < 1$. [Il valore di t_1 può non essere uguale al precedente. Suggerimento: sul triangolo determinato dalle relazioni $-1 < x < t$ e $t < 1$ si confronti la soluzione x con una dell'equazione $y' = y + 1$.]

(G) [3 punti] Si dimostri che se $z_0 < -1$ e $t_0 \in \mathbb{R}$ allora la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} z' = \frac{z^2-1}{-1-t} \\ z(t_0) = z_0 \end{cases}$$

è definita su un intervallo limitato centrato nel punto $t = -1$. Inoltre $z(-1) = -1$ ed esiste $t_1 < -1$ tale che $z(t_1) = t_1$. [Il valore di t_1 può non essere uguale ai precedenti.]

(H) [3 punti] Si provi che se $t_0 < x_0 < -1$ allora la soluzione x del problema iniziale è definita su un intervallo del tipo $(t_1, -1)$. Si dimostri inoltre che $\lim_{t \to -1^-} x'(t) = 0$. [Il valore di t_1 può non essere uguale ai precedenti. Suggerimento: sulla regione determinata dalla relazione $t < x < -1$ si confronti la soluzione x con una dell'equazione $z' = (z^2 - 1)/(-1 - t)$.]

Esercizio 2. Dato $r > 0$ si consideri in $\mathbb{C}$ l'insieme X_r definito dall'equazione $|z^2 - 1|^2 = r^2$.

(A) [3 punti] Si dimostri che X_r è simmetrico rispetto agli assi reale e immaginario. [Suggerimento: si esprima l'equazione in termini reali ponendo $z = x + iy$.]

(B) [3 punti] Si dimostri che X_r è limitato.

(C) [3 punti] Si dimostri che ogni retta reale contenuta nel piano complesso interseca X_r in al più 4 punti.

(D) [2 punti] Si dimostri che se $r < 1$ allora X_r non è connesso. [Suggerimento: si cerchi una retta che X_r non incontra.]

(E) [2 punti] Si dimostri che se $r \neq 1$ allora X_r è una curva.

(F) [2 punti] Si calcoli il massimo della funzione $|z|^2$ sull'insieme X_r.

(G) [2 punti] Si dimostri che se $r > 1$ allora, fissato qualsiasi θ, la semiretta $\{t\,\mathrm{e}^{i\theta} \,:\, t > 0\}$ incontra X_r in un solo punto.

(H) [2 punti] Si esibisca un punto z_0 di $\mathbb{C}$ tale che per ogni funzione f olomorfa su $\mathbb{C}$ l'integrale $\int\limits_{X_r} \frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z$ è sempre definito per $r > 1$ e indipendente da r.

(I) [2 punti] Si esibiscano un punto z_0 di $\mathbb{C}$, una funzione f olomorfa su $\mathbb{C}$ e due valori $r, r' > 1$ tali che gli integrali $\int\limits_{X_r} \frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z$ e $\int\limits_{X_{r'}} \frac{f(z)}{z-z_0}\,\mathrm{d}z$ sono definiti ma hanno valori diversi.

(J) [2 punti] Si dimostri che X_r non è una curva per $r = 1$.