UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

"Matematica III 00/01" + "Matematica 99/00" – Scritto del 10/02/01

Esercizio 1. Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{C}$ con bordo differenziabile e sia $z_0 \in \Omega$. Per $k \geq 1$ intero sia $\mathcal{A}_k$ l'insieme delle $f \in \mathcal{H}(\overline{\Omega} \setminus \{z_0\})$ tali che per $n < 0$ intero si ha

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}z = \begin{cases} 1 & \text{per } -k \leq n < 0, \\ 0 & \text{per } n < -k. \end{cases}$$

(A) [3 punti] Dimostrare che se $f \in \mathcal{A}_k$ allora z_0 è per f una singolarità polare. Calcolare inoltre l'ordine di polo ed il residuo di f in z_0.

(D'ora in poi per comodità è lecito supporre $z_0 = 0$.)

(B) [3 punti] Date $f_1 \in \mathcal{A}_{k_1}$ e $f_2 \in \mathcal{A}_{k_2}$, determinare le condizioni su k_1 e k_2 per le quali si ha che

$$\int_{\partial\Delta_\varepsilon(z_0)} (f_1(z) - f_2(z))\,\mathrm{d}z = 0 \qquad \text{per } \varepsilon \ll 1.$$

(C) [2 punti] Dire se le condizioni del punto (B) assicurino anche che $\int_{\partial\Omega} (f_1(z) - f_2(z))\,\mathrm{d}z = 0$.

(D) [3 punti] Date $f_1 \in \mathcal{A}_{k_1}$ e $f_2 \in \mathcal{A}_{k_2}$, determinare le condizioni su k_1 e k_2 per le quali si ha che

$$\int_{\partial\Delta_\varepsilon(z_0)} \frac{f_1(z)}{f_2(z)}\,\mathrm{d}z = 0 \qquad \text{per } \varepsilon \ll 1.$$

(E) [2 punti] Dire se le condizioni del punto (D) assicurino anche che $\int_{\partial\Omega} \frac{f_1(z)}{f_2(z)}\,\mathrm{d}z = 0$.

(F) [3 punti] Data $f \in A_k$ e $z_1 \in \Omega$ distinto da z_0, si ponga $g(z) = f(z)/(z - z_1)$. Trovare i poli di g ed i rispettivi ordini di polo. Trovare inoltre il residuo di g in z_0.

(G) [3 punti] Data $f \in A_k$ sia $F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w$. Provare che F è olomorfa in Ω.

(H) [3 punti] Dimostrare che se $f \in A_k$ e $\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z \geq -k + 2$ allora $f : \Omega \to \mathbb{C}$ non è iniettiva.

Esercizio 2. Si consideri l'equazione differenziale $x' = \dfrac{\log(t^2 + x^2)}{1 + x^2}$.

(A) [3 punti] Dire se ne esistono soluzioni pari.

(B) [2 punti] Dire se ne esistono soluzioni dispari.

Dato $a \in \mathbb{R}$ tale che $a \neq 0$, sia x_a la soluzione dell'equazione tale che $x_a(0) = a$.

(C) [3 punti] Dimostrare che ogni x_a è definita su tutto $\mathbb{R}$. (Suggerimento: usare il fatto che la soluzione esiste per t piccolo. Quindi esaminare fin dove la soluzione si prolunghi, oppure stimare $x'(t)$ per t grande.)

(D) [3 punti] Dire se esistono soluzioni x_a sempre crescenti o sempre decrescenti. (Suggerimento: esaminare la regione del piano (t, x) nel quale le soluzioni crescono e quella in cui decrescono.)

(E) [3 punti] Dimostrare che per ogni a si ha che

$$\lim_{t\to+\infty} x_a(t) = +\infty, \qquad \lim_{t\to-\infty} x_a(t) = -\infty$$

(F) [3 punti] Dimostrare che nessuna x_a ha un asintoto obliquo per $t \to +\infty$. (Suggerimento: ricordare che se un asintoto esiste allora il suo coefficiente angolare $m \neq 0$ è dato da $m = \lim_{t\to+\infty} x(t)/t = \lim_{t\to+\infty} x'(t)$.)

Dato $a > 0$ con $a \neq 1$ sia y_a la soluzione dell'equazione differenziale $y' = \dfrac{\log(5/4) - 1}{1 + y^2}$ tale che $y_a(0) = a$.

(G) [3 punti] Dimostrare che y_a ha un unico zero e calcolarlo. (Suggerimento: notare che l'equazione è a variabili separabili.)

(H) [3 punti] Mostrare che se $0 < a < 1/(2\sqrt{\mathrm{e}})$ allora la x_a ha esattamente tre zeri, uno dei quali compreso tra 0 e $1/\sqrt{\mathrm{e}}$. (Suggerimento: confrontare x_a e y_a nella regione in cui x decresce.)