"Matematica III 00/01" + "Matematica 99/00" – Scritto del 10/09/01

Esercizio 1. Sia $a \in \mathbb{R}$ e sia x_a la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x-1}{t^2+x^2}, \\ x(-1) = a. \end{cases}$$

(A) [3 punti] Si dica per quali a la x_a sia un polinomio.

(B) [3 punti] Si dimostri che per $a \geq 1$ la x_a esiste su tutto $\mathbb{R}$. [Suggerimento: si trovi una maggiorazione per la funzione $(x-1)/(t^2+x^2)$ sul semipiano $\{(t,x) : \ x \geq 1\}$.]

(C) [4 punti] Si dimostri che per $a < 0$ la x_a esiste su tutto $\mathbb{R}$. [Suggerimento: si trovi una minorazione per la funzione $(x-1)/(t^2+x^2)$ sul semipiano $\{(t,x) : \ x \leq a\}$.]

(D) [3 punti] Si deduca dai punti precedenti che per ogni a la x_a esiste su $(-\infty, 0)$.

(E) [3 punti] Si dimostri che se $\lim_{t \to 0^-} x_a(t) \neq 0$ allora la x_a è definita su tutto $\mathbb{R}$.

(F) [3 punti] Si dimostri che se x_a esiste su tutto $\mathbb{R}$ allora è limitata. [Suggerimento: usare la disuguaglianza $t^2 + x^2 \geq t^2$.]

(G) [3 punti] Si dimostri che per qualche $a \in \mathbb{R}$ la x_a non si estende a tutto $\mathbb{R}$. [Suggerimento: si esaminino gli insiemi $\{a : \ x_a(0^-) > 0\}$ e $\{a : \ x_a(0^-) < 0\}$.]

Esercizio 2. Siano $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ le curve definite da $\gamma_1 = (\cos t, \sin t + 1)$ e $\gamma_2 = (\cos t, -\sin t - 1)$. Sia $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,1), (0,-1)\}$ e sia ω una 1-forma chiusa definita su Ω tale che $\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega \neq 0$. Sia $B_{(x,y)}(z)$ il disco chiuso in $\mathbb{R}^2$ di centro (x, y) e raggio z.

(A) [5 punti] Si dica su quali dei seguenti domini ω sia esatta:

1. Ω;
2. $\Omega \setminus B_{(0,1)}(1)$;
3. $\Omega \setminus B_{(0,0)}(2)$;
4. $\Omega \setminus (B_{(0,1)}(1/2) \cup B_{(0,-1)}(1/2))$;
5. $(\Omega \setminus B_{(0,0)}(3)) \cup B_{(0,0)}(1/2)$.

(B) [3 punti] Sia $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ z \geq 0, \ \omega \text{ è esatta su } \Omega \setminus B_{(x,y)}(z)\}$. Si trovino per T equazioni (o disequazioni) analitiche esplicite.

(C) [2 punti] Si dimostri che T è l'intersezione degli insiemi C_+ e C_- definiti come segue: $C_\pm$ è il cono positivo infinito in $\mathbb{R}^3$ di vertice $(0, \pm 1, 0)$ e base il disco chiuso di raggio 1 e centro $(0, \pm 1, 1)$ nel piano di equazione $z = 1$, ovvero:

$$C_\pm = \{(1-t) \cdot (0, \pm 1, 0) + t \cdot (x, y, 1) : \ t \geq 0, \ x^2 + (y \mp 1)^2 \leq 1\}.$$

Per $k \in \mathbb{R}$ sia ora S_k l'intersezione di T col piano di equazione $z = k$.

(D) [3 punti] Si deduca dal punto precedente che S_k è l'intersezione di due dischi, è vuoto per $k < 1$ ed è non vuoto per $k \geq 1$.

(E) [3 punti] Si deduca dai punti precedenti che T è dotato di un bordo ∂T che non è una superficie. ma è l'unione di due superfici con il medesimo bordo.

(F) [2 punti] Si dica se l'integrale $\int_T \mathrm{e}^{-y} \cdot z^{-2} \cdot \sqrt{x^2 + (y-1)^2} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$ abbia valore finito.

(G) [3 punti] Sia $\eta = \omega + \cos(xy) \, \mathrm{e}^z \, \mathrm{d}z$, dove ω è la forma già considerata sopra. Si dica per quali $k \in \mathbb{R}$ l'integrale $\int_{\partial S_k} \eta$ sia definito, e per tali k lo si calcoli.

(H) [2 punti] Si calcoli $\int_{S_2} \Big(z^2 (x - (y+1)) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y + x y^2 \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}x \Big)$.