UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

"Matematica III 00/01" + "Matematica 99/00" – Scritto del 18/06/01

Esercizio 1. Dato un parametro reale λ si considerino in $\mathbb{R}^3$ le forme

$$\begin{aligned} \omega_1 &= (z - 2\lambda z^3)\,\mathrm{d}z, \\ \omega_2 &= \lambda x y^2\,\mathrm{d}x, \\ \omega_3 &= (\lambda y + (\lambda-2)y^2 z + 2x^2 y)\,\mathrm{d}y, \\ \omega &= \omega_1 + \omega_2 + \omega_3. \end{aligned}$$

(A) [3 punti] Per ogni $i = 1,2,3$ si determinino i valori di λ per cui ω_i è esatta.

(B) [3 punti] Si determinino i valori di λ per cui ω è esatta.

(C) [3 punti] Si dica se esiste una curva chiusa semplice γ tale che $\int_\gamma \omega$ non dipende da λ.

Siano ora

$$\begin{aligned} \alpha &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x = y = z > 0\}, \\ \beta &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ (x-1)^2 + (y-1)^2 = 5 - (z+1)^2 = 2 - (z-2)^2\}. \end{aligned}$$

(D) [3 punti] Si determinino i valori di λ per cui $\int_\alpha \omega$ è finito.

(E) [3 punti] Si calcoli $\int_\beta \omega$.

Esercizio 2. Siano $f, g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$. Si dimostri che:

(A) [4 punti] Esiste $k \in \mathbb{C}$ non nullo tale che $f(z) = g(z+k)$ per ogni $z \in \mathbb{C}$ se e soltanto se esistono $x, y \in \mathbb{C}$ distinti tali che $f^{(n)}(x) = g^{(n)}(y)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

(B) [4 punti] Esiste $k \in \mathbb{C}$ diverso da 1 tale che $f(z) = g(k \cdot z)$ per ogni $z \in \mathbb{C}$ se e soltanto se esistono $x, y \in \mathbb{C}$ distinti ed entrambi non nulli tali che $f^{(n)}(x) = (y/x)^n \cdot g^{(n)}(y)$ per ogni n.

Si consideri ora una sola $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ e si dimostri che:

(C) [4 punti] La f è costante se e soltanto se esistono successioni $(x_p)_{p=0}^\infty$ e $(y_p)_{p=0}^\infty$ di numeri complessi tali che:

- $x_p \neq y_p$ per ogni $p \in \mathbb{N}$;
- $\lim_{p\to\infty} |x_p - y_p| = 0$;
- $f^{(n)}(x_p) = f^{(n)}(y_p)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $p \in \mathbb{N}$.

(D) [3 punti] La f è costante se e soltanto se $f^{(n)}(1) = \mathrm{e}^{inp} f^{(n)}(\mathrm{e}^{ip})$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $p \in \mathbb{N}$.

Esercizio 3. Dato $k \in \mathbb{R}$ si consideri per $t \in (-\infty, 0)$ il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = \frac{xt-1}{2t} \\ x(-1) = k \end{cases}$$

(A) [3 punti] Si dimostri che se $k \leq -1$ allora la soluzione esiste su tutto l'intervallo $(-\infty, -1]$ e se ne calcoli il limite per $t \to -\infty$.

(B) [3 punti] Supponendo noto che per $k \geq -1$ la soluzione esiste su $[-1, 0)$, si dimostri che esiste si calcoli $\lim_{t \to 0^-} x'(t)$.

(C) [3 punti] Supponendo noto che per $k \geq 0$ la soluzione esiste su $[-1, 0)$, si provi che lo stesso accade per $-1 \leq k < 0$.

(D) [3 punti] Si dimostri che se $k > 0$ allora esiste $t_0 < -1$ tale che la soluzione esiste su tutto $[t_0, -1]$ e $x(t_0) = 0$. [Suggerimento: si confronti x con una soluzione dell'equazione $y' = -1/2t$.]

(E) [3 punti] Si dimostri che per $k \geq -1$ la soluzione esiste su $[-1, 0)$. [Suggerimento: si usi il punto (C) e si confronti la x con una soluzione dell'equazione $y' = -1/t + c$ per una scelta opportuna di c e del dato iniziale.]