"Matematica III 00/01" + "Matematica 99/00" – Scritto del 24/09/01

Esercizio 1. Sia $a \in \mathbb{R}$ e sia x_a la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = x \cdot t^2 \cdot (x - t), \\ x(0) = a. \end{cases}$$

(A) [3 punti] Si trovino tutti gli a per i quali x_a è un polinomio.

(B) [3 punti] Fissati a ed un valore $t_0 > 0$ tale che x_a sia definita su $[0, t_0]$, si dimostri che x_{-a} è definita su $[-t_0, 0]$ e che $x_{-a}(t) = -x_a(-t)$ per ogni $t \in [-t_0, 0]$.

(C) [3 punti] Per ogni $a > 0$ si dimostri che x_a è definita su $(-\infty, 0]$ e si calcoli $\lim_{t \to -\infty} x_a(t)$.

(D) [3 punti] Sia dato $a > 0$ tale che x_a interseca la retta di equazione $x = t$. Si dimostri che allora x_a è definita su tutto $\mathbb{R}$, e si calcoli $\lim_{t \to +\infty} x_a(t)$.

(E) [3 punti] Sia dato $a > 0$ tale che $\lim_{t \to +\infty} x_a(t) = 0$. Si dimostri che $\lim_{t \to +\infty} x_b(t) = 0$ per ogni $b \in (-\infty, a]$.

(F) [3 punti] Sia dato $a > 0$ tale che, per ogni $t > 0$ sul quale x_a è definita, si ha $x_a(t) > 2t$. Si dimostri che allora x_a non è definita su tutto $\mathbb{R}$.

(G) [4 punti] Si dimostri che per qualche a si ha che x_a non è definita su tutto $\mathbb{R}$. [Suggerimento: si usi il punto precedente.]

Esercizio 2.
Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto e sia $\mathcal{M}(\Omega)$ l'insieme delle funzioni meromorfe su Ω (cioè delle funzioni olomorfe su Ω tranne che in un numero finito di singolarità di tipo polare). Data $g \in \mathcal{M}(\Omega)$ si ponga:

$$V(g) = \{f \in \mathcal{M}(\Omega) : \ f \cdot g \in \mathcal{O}(\Omega)\}.$$

(A) [3 punti] Si dimostri che $V(g)$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$.

(B) [3 punti] Si dimostri che ogni $f \in V(g)$ è olomorfa in tutti i punti di Ω in cui g non si annulla (inclusi i poli di g).

(C) [4 punti] Nel caso in cui $\Omega = \mathbb{C}$ e $g(z) = \frac{z^2}{(z-i)^3}$, si descrivano tutti i possibili sviluppi di Laurent in $z = 0$ e in $z = i$ delle $f \in V(g)$.

(D) [4 punti] Si dimostri che

$V(g) \subset \mathcal{O}(\Omega)$ se e soltanto se g è priva di zeri.

(E) [3 punti] Siano dati $f \in V(g)$ e $\Lambda \subset \Omega$

un dominio limitato con una frontiera regolare la quale non contiene né zeri né poli né di f né di g. Si provi che

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Lambda} \frac{f'}{f} \, \mathrm{d}z \geq -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Lambda} \frac{g'}{g} \, \mathrm{d}z.$$

(F) [3 punti] Date $g_1, g_2 \in \mathcal{M}(\Omega)$ si dimostri che $V(g_1) = V(g_2)$ se e soltanto se esiste una $h \in \mathcal{O}(\Omega)$ mai nulla tale che $g_2 = h \cdot g_1$.

(G) [3 punti] Si dimostri che per ogni $g_1, g_2 \in \mathcal{M}(\Omega)$ gli spazi vettoriali $V(g_1)$ e $V(g_2)$ sono tra loro isomorfi.