Matematica III — Scritto del 2/2/02

Esercizio 1. Per $k \in \mathbb{R}$ sia x_k la soluzione del seguente problema di Cauchy (definita sull'intervallo massimo possibile):

$$\begin{cases} x' = \frac{x}{x^2 + \mathrm{e}^t}, \\ x(0) = k. \end{cases}$$

(A) [4 punti] Si dimostri che ogni x_k è definita su $(-\infty, 0]$ e si calcoli $\lim_{t \to -\infty} x_k(t)$ quando esiste.

(B) [3 punti] Si provi che se x_k è definita su $(-\infty, a)$ allora anche x_{-k} è definita su $(-\infty, a)$ e $x_{-k}(t) = -x_k(t)$ per ogni t.

(C) [3 punti] Si dimostri che in realtà per ogni k la x_k è definita su tutto $\mathbb{R}$.

Esercizio 2. Si fissino un aperto Ω di $\mathbb{C}$ e $z_0 \in \Omega$. Per $k \in \mathbb{N}$ si consideri l'insieme

$$V_k = \{ f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \{z_0\}) : \ f(z)(z - z_0)^k \in \mathcal{H}(\Omega) \},$$

dove per "$f(z)(z - z_0)^k \in \mathcal{H}(\Omega)$" si intende che la funzione $z \mapsto f(z)(z - z_0)^k$ ha una singolarità eliminabile in z_0.

(A) [4 punti] Si dimostri che se $k \leq h$ allora $V_k \subset V_h$.

(B) [3 punti] Si dimostri che se $k \neq h$ allora $V_k \neq V_h$.

(C) [3 punti] Si dimostri che V_k è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{H}(\Omega \setminus \{z_0\})$ ma che può non contenere il prodotto di due funzioni che gli appartengono.

(D) [4 punti] Sia $\varepsilon > 0$ minore della distanza tra z_0 e $\partial\Omega$. Per $f \in V_k$ si ponga

$$\psi(f) = \Big(\int_{\partial \Delta_\epsilon(z_0)} f(z)(z - z_0)^{j-1} \, \mathrm{d}z \Big)_{j=1,\ldots,k}.$$

Si dimostri che $\psi(f)$ è indipendente da ε e che la $\psi(f) : V_k \to \mathbb{C}^k$ è una applicazione lineare.

(E) [3 punti] Si dimostri che $\mathrm{Ker}(\psi)$ è l'insieme delle $f \in V_k$ aventi singolarità eliminabile in z_0.

(Continua.)

Esercizio 3. Si consideri in $\mathbb{R}^3$ la superficie

$$\Sigma = \{(x, y, z) : \; x^2 + y^2 = 1, |z| \le 1\}.$$

(A) [4 punti] Si calcoli $\left| \int_\Sigma \left(x\, e^z \, dz\, dy + \, e^z \, dx \, dy \right) \right|$.

(B) [4 punti] Si consideri la 1-forma $\omega = x\, dy - y\, dx$. Si dimostri che ω non è chiusa come forma su $\mathbb{R}^3$ ma che $\int_{\Sigma'} d\omega = 0$ per ogni superficie Σ' contenuta in Σ.

(C) [4 punti] Sia $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ data da $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0)$. Si dimostri che l'immagine di γ è contenuta in Σ e si calcoli $\int_\gamma \omega$.

(D) [3 punti] Si calcolino il massimo ed il minimo su Σ della funzione xyz.

(E) [3 punti] Si calcoli $\left| \int_\Sigma e^{x+y^2+z^2} \, dx\, dy - 2z\, e^{x+y^2+z^2} \, dy\, dz \right|$.