Matematica III — Scritto del 12/01/02

Esercizio 1. Si considerino in $\mathbb{R}^3$ le superfici seguenti:

$$\Sigma_1 = \{(x,y,z) : \ x^2+y^2 \leq 1, \ z = 1-(x^2+y^2)\}, \quad \Sigma_2 = \{(x,y,z) : \ z \geq 0, \ x^2+y^2+(z-1)^2 = 2\}.$$

(A) [3 punti] Si dimostri che $\partial\Sigma_1 = \partial\Sigma_2$.

Si scelgano ora orientazioni per Σ_1 e Σ_2 che inducano la medesima orientazione su $\partial\Sigma_1 = \partial\Sigma_2$.

(B) [4 punti] Si dimostri che $\left| \int_{\Sigma_1} y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}z - \int_{\Sigma_2} y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}z \right| < 8\pi\sqrt{2}/3$.

(C) [4 punti] Si calcoli $\int_{\Sigma_2} x \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$.

(D) [4 punti] Si calcolino il massimo ed il minimo su Σ_2 della funzione $x + 2y$.

Esercizio 2. Si consideri la funzione meromorfa g definita come segue:

$$g(z) = \frac{\sin z}{z^3 - iz^2}$$

(A) [4 punti] Si elenchino gli zeri ed i poli di g con i rispettivi ordini.

Per $t > 0$ sia ora $\Delta_t = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| < t\}$ e sia $f(t) = \int_{\partial\Delta_t} g(z) \, \mathrm{d}z$.

(B) [4 punti] Si dimostri che esiste $t_0 > 0$ tale che la f è definita su $(0, t_0)$ e $(t_0, +\infty)$ e costante su ciascuno di questi intervalli.

(C) [3 punti] Si calcolino $f(\frac{1}{2})$ e $f(2)$.

(D) [2 punti] Si calcoli $\int_{\partial\Delta_{\frac{1}{2}}} \frac{g(z)}{z} \, \mathrm{d}z$.

(E) [2 punti] Si scrivano i primi due termini significativi della serie di Laurent di g centrata in i.

Esercizio 3. Per $k \in \mathbb{R}$ sia x_k la soluzione del seguente problema di Cauchy (definita sull'intervallo massimo possibile):

$$\begin{cases} x' = \sin(x), \\ x(0) = k. \end{cases}$$

(A) [3 punti] Si dimostri che per ogni $k \in \mathbb{R}$ la x_k è definita su tutto $\mathbb{R}$.

(B) [3 punti] Si dimostri che $\lim\limits_{t \to +\infty} x_k(t)$ esiste ed è finito per ogni $k \in \mathbb{R}$.

(C) [4 punti] Si dimostri che

$$\left\{ \lim_{t \to +\infty} x_k(t) : k \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ k\pi : \; k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

(D) [3 punti] Si dimostri che per ogni insieme finito $\{a_1, \ldots, a_n\}$ di numeri reali esiste una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che, se y_k è la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(y), \\ y(0) = k, \end{cases}$$

allora esistono valori $k_1, \ldots, k_n$ tali che y_{k_i} esiste su $[0, +\infty)$ e $\lim\limits_{t \to +\infty} y_{k_i}(t) = a_i$.

(E) [2 punti] Si dimostri che in realtà nel punto precedente si può scegliere f tale che ogni y_k esiste su $[0, +\infty)$ ed ha limite per $t \to +\infty$, e

$$\left\{ \lim_{t \to +\infty} y_k(t) : k \in \mathbb{R} \right\} = \{a_1, \ldots, a_n\}.$$