Matematica III — Scritto del 01/09/03

Esercizio 1. Posto $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leqslant 1\}$, per ogni $t \in \mathbb{R}$ sia $h_t : D \to \mathbb{R}$ la funzione definita da:

$$h_t(x, y) = x^2 + txy - y^2.$$

Sia S_t il grafico di h_t, cioè $S_t = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 \leqslant 1, \ z = h_t(x, y)\}$, e sia $f(t)$ l'area di S_t. Sia in oltre ω la seguente 2-forma definita su $\mathbb{R}^3$:

$$\omega(x, y, z) = \sqrt{\left|1 - x^2 - y^2\right|}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$$

e sia $g(t) = \left| \int_{S_t} \omega \right|$.

(A) [3 punti] Si dica se le funzioni $t \mapsto f(t)$ e $t \mapsto g(t)$ siano differenziabili.

(B) [4 punti] Si calcolino

$$\inf_{t\in\mathbb{R}} f(t) \qquad \sup_{t\in\mathbb{R}} f(t) \qquad \inf_{t\in\mathbb{R}} g(t) \qquad \sup_{t\in\mathbb{R}} g(t).$$

(C) [4 punti] Si dica se gli inf siano dei minimi.

(D) [4 punti] Si dica se i sup siano dei massimi.

Esercizio 2.

(A) [3 punti] Si trovino tutte le soluzioni $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dell'equazione differenziale $x'' + x = 0$.

(B) [4 punti] Si trovino tutte le soluzioni dell'equazione differenziale

$$x'' + x = \frac{\sin t}{(\cos t)^2}$$

che siano definite in un intorno di zero.

(C) [4 punti] Si trovi la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'' + x = \dfrac{\sin t}{(\cos t)^2} \\ x(0) = 0 \\ x'(0) = 1. \end{cases}$$

(D) [4 punti] Si dica la soluzione del punto (C) sia definita globalmente su $\mathbb{R}$.

Esercizio 3. Sia $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{z^2 + c^2}$ con c reale positivo.
Siano $\Delta(r) = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| < r\}$ e $\Delta^+(r) = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| < r, \Im(z) > 0\}$.

(A) [3 punti] Si trovino i poli e gli zeri di f, specificandone l'ordine.

(B) [4 punti] Si calcoli $\displaystyle\int_{\partial\Delta(r)} f(z)\,\mathrm{d}z$ al variare di r in $(0, +\infty)$.

(C) [4 punti] Si calcoli $\displaystyle\int_{\partial\Delta^+(r)} f(z)\,\mathrm{d}z$ al variare di r in $(0, +\infty)$.

(D) [4 punti] Si calcolino $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2 + c^2}\,\mathrm{d}x$ e $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + c^2}\,\mathrm{d}x$.