UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Matematica III — Scritto del 5/6/03

Esercizio 1. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \geq 0, \\ 0 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

(A) [3 punti] Si dimostri che f ammette ovunque derivata prima, ma non derivata seconda.

(B) [3 punti] Si determini lo sviluppo di Taylor di f centrato in 1 ed il suo raggio di convergenza.

(C) [3 punti] Si trovi la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = f(x), \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

(D) [3 punti] Sia $F = \mathcal{L}(f)$ la trasformata di Laplace di f. Si determini $F(z)$.

(E) [3 punti] Si provi che la F può essere estesa ad una funzione (ancora denotata con F) olomorfa su $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, e si calcoli

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \Delta} \frac{F'(z)}{F(z)} \, \mathrm{d}z.$$

Esercizio 2. Per ogni $r > 0$ si consideri l'insieme

$$E_r = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ (rx)^2 + (y/r)^2 + z^2 = 1 \right\}.$$

(A) [4 punti] Si dimostri che E_r è una superficie e che

$$\lim_{r \to 0} \mathcal{A}(E_r) = \lim_{r \to +\infty} \mathcal{A}(E_r) = +\infty,$$

dove $\mathcal{A}$ indica l'area.

(B) [4 punti] Si provi che $\gamma_r = \{(x, y, z) \in E_r : \ z = 0\}$ è una curva e si trovino due parametrizzazioni $\sigma_{\pm}^{(r)} : [0, 1] \times [0, 2\pi] \to V_{\pm}^{(r)}$ tali che $V_+^{(r)} \cup V_-^{(r)} = E_r$ e $V_+^{(r)} \cap V_-^{(r)} = \gamma_r$.

(C) [3 punti] Scelta una orientazione per E_r, si calcoli

$$\int_{E_r} x^2 \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z.$$

(D) [4 punti] Con la stessa orientazione del punto precedente, si calcoli

$$\int_{E_r} y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}z.$$

Esercizio 3.

(A) [5 punti] Si trovi su $\mathbb{C}$ una funzione meromorfa f del tipo $f(z) = z^\alpha \cdot (1-z)^\beta$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$, tale che

$$z^3 \cdot \big(f(z) - (1-z)f'(z)\big) = 2 \quad \forall z.$$

(B) [3 punti] Si trovi lo sviluppo di Laurent di f centrato in 0 e si dica dove converge.

(C) [3 punti] Si descrivano gli insiemi di convergenza degli sviluppi di Laurent di f centrati in 1 e in i.

(D) [4 punti] Si calcoli

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$$

dove $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ è data da

$$\gamma(t) = \frac{1}{2} + \cos(t) + i\sin(2t).$$